

TD du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes
Exercice 1

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

- 1) Donner la loi de X . Justifier.
- 2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer $P(Y = k \mid X = i)$.
 - b. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

☺ On pourra utiliser l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.

Exercice 2

Deux lois de probabilités classiques (mais hors programme).

- 1) Loi hypergéométrique : Cette loi usuelle modélise le tirage simultané de n boules dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches (i.e. il y a Np boules blanches). On désigne par Ω l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par X le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X . On vérifiera que $P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

Que devient $P(X = k)$ lorsque N tend vers l'infini (avec p et n fixés) ?

- 2) Loi triangulaire : Autre loi usuelle qui modélise la somme S de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Déterminer la loi de S . Pourquoi l'appelle-t-on "loi triangulaire" ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.

Quelle est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$?

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et suivant une même loi.

En étudiant les racines de $G_{X_1} G_{X_2}$, montrer que $X_1 + X_2$ ne peut pas suivre une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$.

Exercice 4

Un parc d'attraction accueille chaque jour un nombre N variable de visiteurs qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- 1) Le parc dispose de 4 entrées, numérotées de 1 à 4. Chaque visiteur en choisit une au hasard et sans tenir compte du choix des autres visiteurs. X désigne le nombre de visiteurs par jour qui entrent par l'entrée n° 1.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire X sachant $(N = k)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - c. Soit n un entier naturel. Justifier que $P(X = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(N = k)P_{(N=k)}(X = n)$, puis en déduire que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
- 2) L'une des attractions du parc est un jeu consistant à lancer une balle dans un trou qui s'éloigne de plus en plus à chaque lancer, de telle sorte que :
 - le premier lancer est réussi de façon certaine ;
 - le second lancer est réussi une fois sur deux ;
 - lorsque les $n-1$ premiers lancers sont réussis, la probabilité de réussir le $n^{\text{ième}}$ lancer est de $1/n$;
 - le jeu s'arrête au premier échec.

Si i est un entier naturel non nul, S_i désigne l'évènement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est réussi » et Z est la variable aléatoire qui correspond au numéro du dernier lancer réussi.

- a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
- b. Soit n un entier naturel non nul donné. Exprimer l'évènement $(Z = n)$ en fonction des évènements S_i ou de leurs contraires. En déduire que $P(Z = n) = \frac{n}{(n+1)!}$.
- c. Vérifier que l'on a bien $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(Z = n) = 1$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

- 1) Calculer $P(X \geq m)$.
- 2) Déterminer les lois de $Z = \min(X, Y)$ et $W = X - Y$.
- 3) Les variables aléatoires W et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

On suppose qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} u_n$ avec $u_n = \int_{\lambda}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
- 2) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 3) Soit G_X la fonction génératrice de X . Calculer $G_X(1)$ et $G_X(-1)$.
- 4) En déduire la probabilité que X prenne une valeur paire.

- 5) En s'inspirant des questions précédentes, déterminer la probabilité que la valeur de X soit divisible par 4.
- 6) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant une loi uniforme sur $\{1;2\}$. Quelle est la probabilité pour que XY soit un entier pair ?

Exercice 7

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique. Déterminer la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.



Exercice 8 (Mines)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , de fonction génératrice g_X , définie sur $] -R_X, R_X[$ avec $R_X > 0$.

- Montrer que pour $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la fonction génératrice de $aX + b$ est définie sur $] -R_Y, R_Y[$, avec $R_Y = R_X^{1/a}$ (et $R_Y = +\infty$ quand $R_X = +\infty$), et l'exprimer en fonction de g_X .
- Justifier que g_X est définie en -1 et 1 .
- Montrer que $P(X \text{ pair}) = \frac{g_X(1) + g_X(-1)}{2}$ et $P(X \text{ impair}) = \frac{g_X(1) - g_X(-1)}{2}$.
- Applications si X suit une loi de Poisson, puis si X suit une loi binomiale.

Exercice 9 (ENS)

Soient X et X' deux variables aléatoires dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{A}$, $|P(X \in B) - P(X' \in B)| \leq 2P(X \neq X')$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$ et $(Y_m, Y_m')_{m \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des couples de variables aléatoires entières mutuellement indépendants tels que pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P((Y_m, Y_m') = (i, i')) = \begin{cases} 1 - p_m & \text{si } i = 0 \text{ et } i' = 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \text{ et } i' \in \mathbb{N}^* \\ e^{-p_m} - (1 - p_m) & \text{si } i = 1 \text{ et } i' = 0 \\ \frac{e^{-p_m} p_m^{i'}}{i'!} & \text{si } i = 1 \text{ et } i' \in \mathbb{N}^* \\ a & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

2) Déterminer a et les lois de Y_m et Y_m' pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Y_m et Y_m' sont-elles indépendantes ?

3) Montrer que $P\left(\sum_{m=1}^n Y_m \neq \sum_{m=1}^n Y_m'\right) \leq \sum_{m=1}^n p_m^2$.

