

TD du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien
Exercice 1

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$.

Montrer que f , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , est un projecteur orthogonal sur un sous-espace à préciser.

Exercice 2

Soit $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour tous f, g de E , on pose :

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

On pose par ailleurs :

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \mid f \in C^2([0;1], \mathbb{R}) \text{ et } f'' = f\}.$$

- Montrer que $(f, g) \mapsto (f | g)$ définit un produit scalaire sur E .
- Prouver que V et W sont des sous-espaces supplémentaires dans E et orthogonaux pour le produit scalaire ci-dessus.
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- s est une symétrie orthogonale (i.e. $G = F^\perp$) ;
- s est une isométrie ;
- s est un endomorphisme autoadjoint.

Exercice 4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O(n)$ et une matrice triangulaire supérieure R (« right triangular ») telles que $A = QR$ (Décomposition QR). Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

☺ On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 5

Soient E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E . On note $G = G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(x_i | x_j)$, appelée *matrice de Gram* de la famille $\mathcal{F}$ et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

- Comparer $rg(A)$ et $rg(\mathcal{F})$.
- Montrer que $G = A^T A$.

- 3) Prouver que $\ker(A^T A) = \ker A$ et en déduire que $rg(\mathcal{F}) = rg(G)$.
- 4) Prouver que $\det G \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\det G = 0$?
- 5) Soit F un sous-espace de E muni d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ et x un vecteur de E . Montrer que :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}.$$

Exercice 6

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k^T U_k = 1$ et $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^T$.

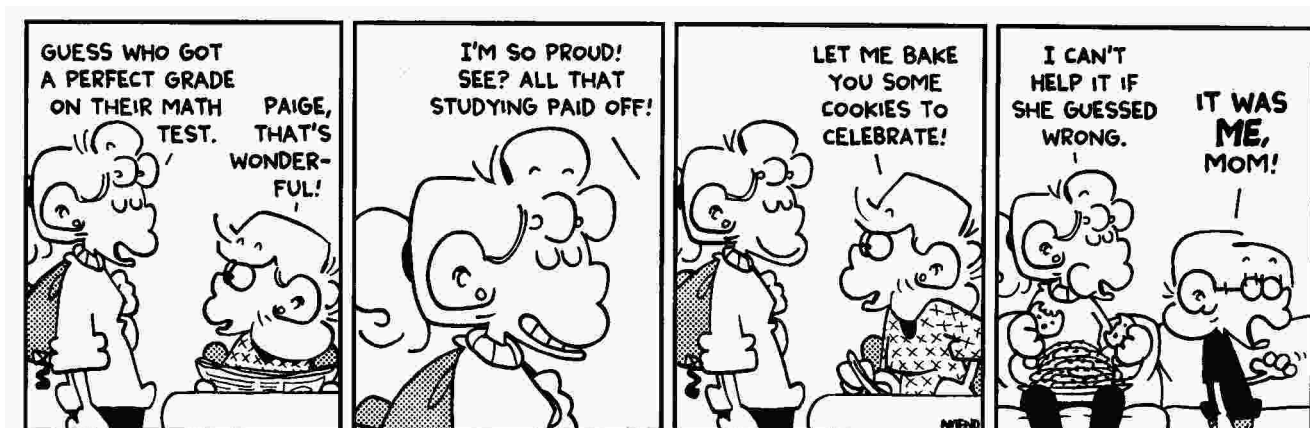
Exercice 7 (autour des endomorphismes autoadjoints positifs)

- 1) Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$ de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Montrer que pour tout vecteur x non nul de E , on a :

$$\lambda_1 \leq \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2} \leq \lambda_n.$$

- 2) Montrer que la matrice de Hilbert $H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^T A$.
 - a. Prouver que S est une matrice symétrique positive.
 - b. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$. La matrice A est-elle unique ?
 - c. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
 - d. Montrer que $rg(A) = rg(S)$.
- 4) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.
- 5) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.



Exercice 8 (Centrale)

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

On veut montrer qu'il existe $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = ADB$ où D est une matrice diagonale à coefficient diagonaux tous strictement positifs.

- 1) Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T M^T M P = D^2$ où D est une matrice diagonale à coefficient diagonaux tous strictement positifs, que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- 2) On note $V_1, \dots, V_n$ les colonnes de MP et appelle Q la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les $\frac{1}{\lambda_1} V_1, \dots, \frac{1}{\lambda_n} V_n$. Prouver que Q est une matrice orthogonale et conclure.

Exercice 9 (Mines)

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , un espace euclidien.

- 1) Montrer qu'un sous-espace F de E est stable par $f \in O(E)$ si et seulement si $F^\perp$ l'est aussi.
- 2) Montrer que, si $f \in O(E)$, $E = \text{Im}(f - id_E) \oplus \text{ker}(f - id_E)$ et que cette somme est orthogonale.
- 3) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note s_{u_k} la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}u_k)^\perp$. Montrer que $\text{Im}(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

