TD du chapitre 17 : Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

Dans les exercices 1 à 3, on se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par la base canonique.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2-1 & a \\ -a & a^2-1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs de *a* pour que $A \in O(2)$.
2) Dans ce cas, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à *A*.

Exercice 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$p(\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{u})\vec{u} \quad \text{et} \quad q(\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}.$$

Montrer que l'application $p+q-2p\circ q$ est une similitude directe, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une homothétie.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $|tr(A)| < 2$ et $\det A = 1$.

a. Montrer que $bc \neq 0$.
b. Montrer que *A* est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base bien choisie.

☺ *Poser* $a+d = 2\cos\theta$ *avec* $0 < \theta < \pi$.

Dans les exercices 4 à 7, s'il y a lieu, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Exercice 4

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de *E*.

1) Montrer que $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$.
2) En déduire la formule du double produit vectoriel : $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$.
3) Résoudre l'équation $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{u} \in E$, où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs donnés de *E*.

Exercice 5

On considère un vecteur unitaire $\vec{a}$ de *E*, *p* la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Vect}(\vec{a})$, $q = id_E - p$ et la rotation *r*, d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par $\vec{a}$ (où θ est un réel fixé).

1) Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de *E*, on a :

$$r(\vec{u}) = p(\vec{u}) + (\cos\theta)\, q(\vec{u}) + (\sin\theta)\, \vec{a} \wedge \vec{u}\,.$$

☺ *On pourra commencer par le cas où $\vec{u}$ est orthogonal à l'axe.*

Justifier que la relation ci-dessus permet d'obtenir directement la matrice de *r* dans une base orthonormale directe donnée.

2) Expliquer comment déterminer l'axe et l'angle d'une rotation donnée par sa matrice dans une base orthonormale directe (on pourra séparer parties symétrique et antisymétrique).

3) Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de *E* et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Montrer qu'il existe une unique rotation *r* telle que $r(\vec{u}) = \vec{u}$ et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$. Préciser la matrice de *r* dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

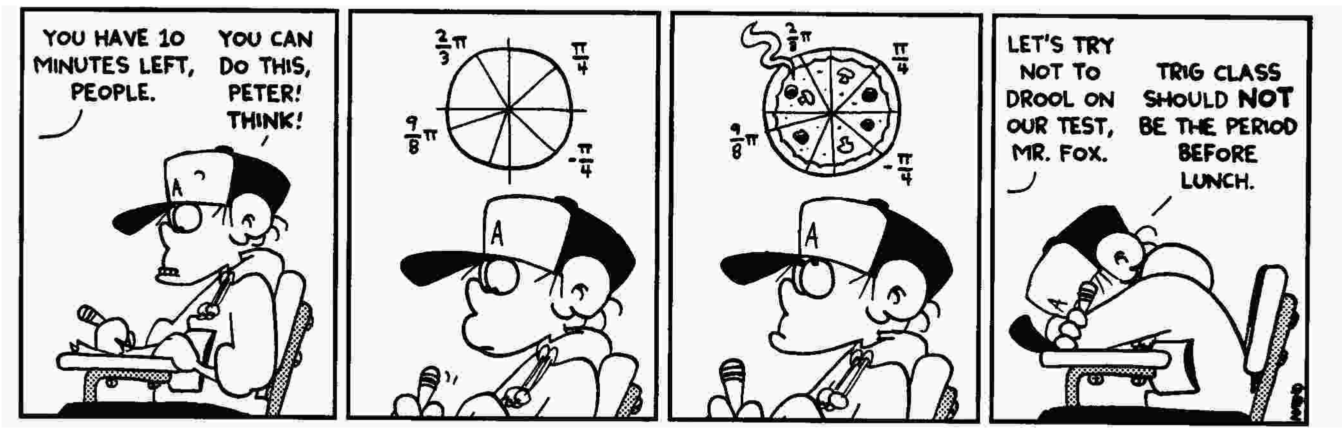
Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Déterminer *a*, *b* et *c* pour que l'endomorphisme canoniquement associé à *A* soit une rotation. Donner alors son axe et son angle.

Exercice 7

Déterminer les centres des groupes $O(E)$ et $SO(E)$.

Le centre d'un groupe est l'ensemble des éléments de ce groupe commutant avec tous les éléments du groupe.



Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$A \in SO_2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Tr(A^{\mathsf{T}} A) = 2 \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Exercice 9

Soit E un espace euclidien orienté de dimansion 3 et $\vec{a}$ une vecteur non nul de E.

On note :

$$f:\vec{x}\mapsto \vec{a}\wedge\vec{x}\,,\quad g:\vec{x}\mapsto \vec{x}+\vec{a}\wedge\vec{x}\quad \text{et}\quad h:\vec{x}\mapsto \vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{x})\,.$$

1) Justifier que f, g et h sont des endomorphismes de E.
2) Montrer qu'il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E telle que $\vec{i}$ et $\vec{a}$ soient colinéaires de même sens et déterminer la matrice A de f dans $\mathcal{B}$.
3) Montrer que $f^3=-\|\vec{a}\|^2\,f$.
4) En déduire une expression simplifiée de $e^A=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}A^n$ (on justifiera la convergence).
5) Déterminer les éléments propres de g.
6) Déterminer un polynôme annulateur de g de degré le plus bas possible.
7) Déterminer les éléments propres de h.