TD du chapitre 18 : Applications géométriques des fonctions vectorielles

Dans tout ce qui suit, le plan (resp. l'espace) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ *(resp.* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$*).*

Exercice 1

Etudier et représenter la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\cos^2 t+\ln(\sin t) \\ y(t)=\sin t\cos t \end{cases}$.

Exercice 2

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $a>0$ et A un point de ce cercle. Déterminer, puis étudier le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM lorsque M décrit $\mathscr{C}$. *La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.*

Exercice 3

Déterminer un paramétrage de la courbe plane C d'équation $(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$ et en déterminer les points singuliers (s'il y en a).

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ la courbe plane d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>0$, $b>0$ et $a>b$.

Trouver les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de O, l'origine du repère (et centre de symétrie de $\mathcal{E}$).

Exercice 5

Soit $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2$.

1) Tracer l'intersection de $\Sigma=f^{-1}(\{1\})$ et du plan P d'équation $z=0$. Dessiner l'allure de Σ .
2) Soit M_0 un point de Σ de coordonnées (x_0,y_0,z_0) . Donner une équation du plan tangent à Σ en M_0 .
3) Soit $g\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ telle que la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0 .

   Soient $G_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto g\left(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\right)$ et $G_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto g\left(x_0,y_0,z_0+t\right)$ avec $\varphi\in\mathbb{R}$ et $(x_0,y_0)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.

   a. Montrer que G_1 et G_2 sont dérivables en 0, et calculer leurs dérivées.

   b. Montrer que $\nabla g(M_0)$ est colinéaire à $\nabla f(M_0)$.

Exercice 6

On définit Σ par l'équation $xyz=1$.

1) Montrer que Σ est une surface régulière.

2) Etudier l'intersection de Σ avec les plans d'équations respectives $x = x_0$, $y = y_0$ et $z = z_0$. En déduire l'allure de Σ.
3) Montrer que pour tout plan tangent à Σ, le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).

   ☺ *Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est donné par* $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$.

Exercice 7

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$.

1) Quelle est l'intersection de S avec le plan (xOy) ?
2) Quels sont les points singuliers de S ?
3) Quelles sont les droites tracées sur S ?
4) Montrer que la partie de S limitée au cube $[-1,1]^3$ admet le paramétrage suivant :

$$(u,v) \mapsto \big(\cos u, \cos v, \cos(u+v)\big).$$

Exercice 8

Fenêtre de Viviani : Soit un réel $a > 0$ et C la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = a\sin(2t) \\ y = a\big(1 - \cos(2t)\big) \\ z = 2a\cos t \end{cases}$$

Montrer que C est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.

Exercice 9

Soient les surfaces : $S_1 \ : \ y^2(x^2+z^2) - x^2 - 3z^2 = 0$ et $S_2 \ : \ -x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

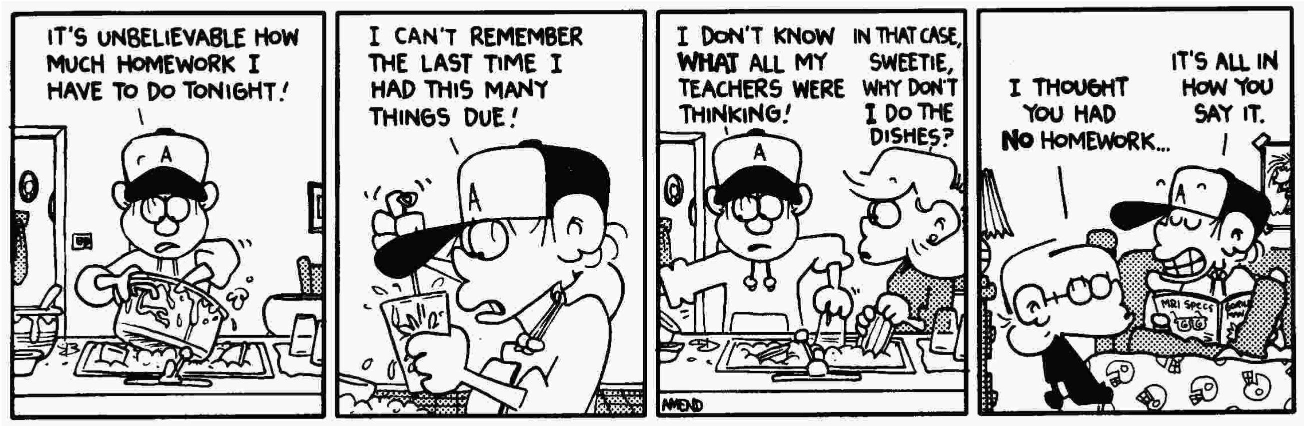
Montrer, qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents à S_1 et S_2 sont perpendiculaires.

Exercice 10

1) Soit $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z+1)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1\right)$. Après avoir justifié qu'elle est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$, calculer la matrice hessienne de f en $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, puis rechercher les extrema de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
2) Mêmes questions pour $f : (x,y) \mapsto (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 11

Soit $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y)$. Montrer que la restriction de f à toutes les droites passant par $(0,0)$ admet un extremum local strict en $(0,0)$ mais que f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.



Exercice 12

Soit $\mathscr{E}$ la courbe plane paramétrée par $f : t \mapsto \big(x(t),\, y(t)\big) = \big(a\cos t, b\sin t\big)$ où a et b sont deux réels tels que $a > b > 1$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

On note $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ et L la longueur de $\mathscr{E}$, donnée par $L = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$.

La courbe $\mathscr{E}$ est une *ellipse* et la réel e est son *excentricité*.

1) Montrer que $\pi(a+b) \leq L \leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.
2) Prouver que $L = 2\pi a\left(1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\left[\binom{2n}{n}\frac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)$.
3) Déterminer l'aire de la surface délimitée par $\mathscr{E}$.

Exercice 13 (*Centrale*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+x^2} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$.

1) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la droite D_a, de pente a et passant par le point $A(1,1)$ et C la courbe tracée sur S dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_a.

   Soit M un point de C. Déterminer la tangente à C en M.

Exercice 14 (*Centrale*)

1) Soient f et g deux fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $m = \max\big(f, g\big)$. On note :

$$\mathcal{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x, y)\right\}$$

$$\mathcal{F} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > g(x, y)\right\}$$

$$\mathcal{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) < g(x, y)\right\}$$

On suppose qu'il existe un point $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ en lequel m réalise un minimum local.

1) Que dire si $\vec{a} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$?
2) On suppose que $\vec{a} \in \mathcal{E}$. Montrer que la famille $\big((\nabla f)(\vec{a}),(\nabla g)(\vec{a})\big)$ est liée.