

TD du chapitre 3 : Limites et continuité

Sauf mention contraire, on se place dans un \mathbb{K} -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ (où \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Exercice 1

Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|} x$ est continue sur E , bijective de E dans la boule ouverte $B(0,1)$ et que sa réciproque est continue. On dit que f définit un *homéomorphisme* de E dans $B(0,1)$.

Exercice 2

On prend ici $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\|f\| = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Montrer que $\phi : E \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$ est continue.

Exercice 3

1) Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.

- a. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- b. Justifier que f est continue sur D .
- c. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$? sur \mathbb{R}_+^2 ? sur \mathbb{R}^2 ?

2) Prouver que $g : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 4

Ici, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension finie $p > 0$.

Soient F est une partie fermée de E et f une application de F dans F , lipschitzienne de rapport $\lambda \in]0,1[$ pour la norme infinie dans une base \mathcal{B} fixée de E (on dit que f est *contractante* pour la norme infinie).

On cherche à prouver que f possède un unique point fixe dans F (c'est un théorème de point fixe).

- 1) Montrer que si f possède un point fixe alors il est unique.
- 2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E définie par $x_0 \in F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$ et que $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$.
- 3) Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on appelle $x_{i,n}$ la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de x_n dans \mathcal{B} .
Montrer que la série $\sum (x_{i,n+1} - x_{i,n})$ est absolument convergente.
- 4) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur a de E tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1 - \lambda} \lambda^n.$$

- 5) Montrer que $f(a) = a$. Conclure.

Exercice 5

Soit une application $f : E \rightarrow F$ où $(F, \|\cdot\|)$ est un EVN (on note la norme comme celle de E).

- 1) Montrer que f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E .
- 2) Montrer que f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de F est une partie fermée de E .
- 3) On suppose que f est continue sur E . L'image d'une partie ouverte est-elle ouverte ? L'image d'une partie fermée est-elle fermée ?

Exercice 6

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7 (Centrale)

Soient $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, a_{i,j} \in [0,1]\}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| \leq \|M - B\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 8**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ et (F, N) deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que l'image par f d'une suite bornée de E est une suite bornée de F . Montrer que f est continue sur E .

☉ On pourra montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $N(f(x)) \leq k\|x\|$.

Exercice 9 (Centrale - MP)

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $E_p = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), P(M) = 0_n\}$. On utilisera une norme quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On étudie les éléments isolés de E_p , c'est-à-dire les matrices M de E_p pour lesquelles il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \cap E_p = \{M\}$.

- 1) Déterminer E_p et étudier les éléments isolés pour $n = 1$.

- 2) Montrer, dans le cas général, qu'il existe une boule ouverte B_0 de centre 0_n telle que $I_n + H$ soit inversible pour tout $H \in B_0$.
- 3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Construire une suite de matrices $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers λI_n et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0_n$.
- 4) Soit M un point isolé de E_p . Montrer qu'il existe une boule ouverte B_1 de centre 0_n telle que pour tout $H \in B_1$, $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M$.
- 5) En déduire que M commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis que M est une matrice d'homothétie. Que dire de son rapport en lien avec P ?
- 6) Montrer, à l'aide de la suite construite dans la question 3, que si λ est racine multiple de P , alors λI_n n'est pas un point isolé de E_p .
- 7) Pour les 5/2. Montrer que si λ est racine simple de P alors λI_n est un point isolé de E_p .

© Reasonner par l'absurde et penser aux valeurs propres.

