TD du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \left[\int_0^1 (t^2+1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} dt \right]$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on considère l'équation $(E_{x,n})$: $t^3 + xt - 1 - \frac{1}{n} = 0$ (d'inconnue *t*).

1) Montrer que $(E_{x,n})$ admet une unique solution réelle, que l'on notera $u_n(x)$.
2) Prouver que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction *u*, strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+$.
3) Prouver que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soient φ une fonction continue sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_0 = \varphi$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = 1 + F_n$ où F_n est la primitive de f_n qui s'annule en 0.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2) En admettant que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction *f*, donner cette fonction.
3) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers *f*. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 4

Pour $x \in \left]1;+\infty\right[$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\tau(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1) Montrer que la fonction ζ est bien définie et continue sur $\left]1;+\infty\right[$.
2) Montrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $\left]1;+\infty\right[$ et exprimer ses dérivées successives sous la forme d'une somme de série.
3) Dresser le tableau de variations de ζ.
4) Après avoir justifié que τ est bien définie sur $\left]1;+\infty\right[$, établir une relation entre ζ et τ.
5) En déduire que τ est de classe C^∞ sur $\left]1;+\infty\right[$.
6) Donner un équivalent de $\zeta(x)$ au voisinage de 1, puis au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{x^2+n^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

☺ *Penser à une certaine technique du chapitre sur les séries numériques…*

Exercice 6

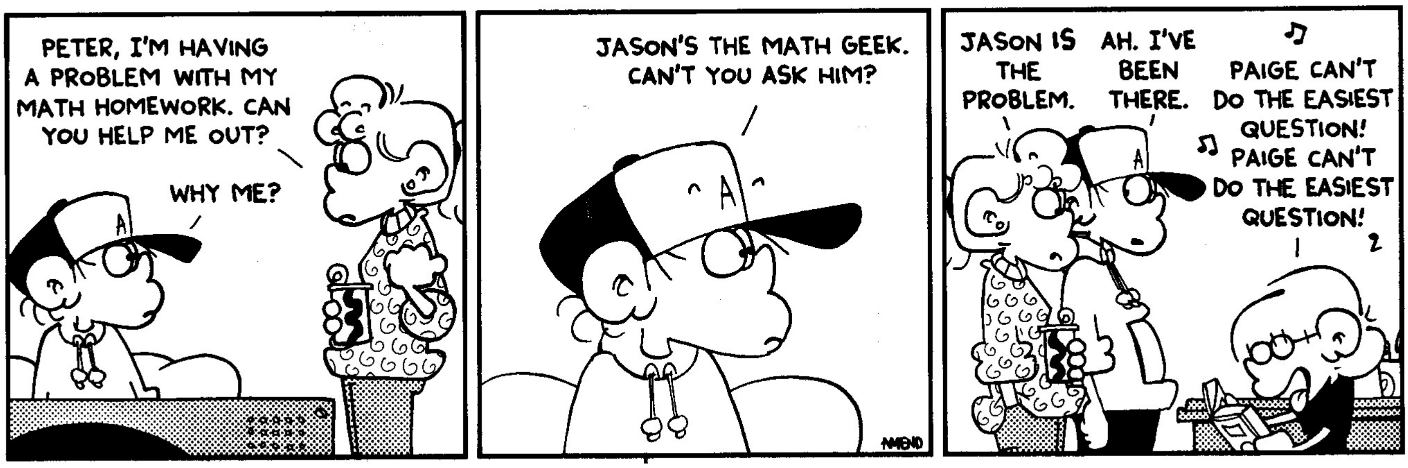
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, on pose $f_n(x)=x^n(1-x)^n$ et $I_n=\int_0^1 f_n(t)dt$ (on prendra $f_0(0)=f_0(1)=1$).

1) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.
2) Calculer I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3) Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 7

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+n^2x)}$.

1) Etudier la convergence de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Etudier la régularité (continuité, dérivabilité, classe C^k) de la somme $S=\sum_{n\geq 1} f_n$.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.



Exercice 8 (Mines)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n(t)=\dfrac{t^n\ln t}{H_n}$.

1) Déterminer le domaine de définition de $S: t\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$.
2) Montrer que S converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0,a]$ avec $a\in\,]0,1[$. En est-il de même sur $]0,1[$?
3) Prouver que S est continue sur $]0,1]$. Est-elle dérivable sur ce même intervalle ?

Exercice 9 (Centrale)

On étudie l'équation fonctionnelle :

$$(E): \quad f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

1) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
2) Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On pose $f(x)=xh(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. A quelle condition sur *h*, la fonction *f* est-elle solution de (*E*) sur $\mathbb{R}$?
3) On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $h_0 : x\mapsto 1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Pour $x\in[0,1]$, soit $T_x : t\mapsto t-\frac{x}{2}t^2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$ et que $T_x([0,1])\subset[0,1]$.

Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

☺ *On pourra montrer que la série de fonctions* $\sum\left(h_{n+1}-h_n\right)$ *converge normalement sur* $[0,1]$.

4) Montrer que l'équation (*E*) admet une solution continue et non constante sur $[0,1]$.
5) Montrer que l'équation (*E*) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.