TD du chapitre 5 : Séries entières

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ et étudier la convergence au bord du disque de convergence pour :

a. $a_n = \dfrac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n}$.

b. $a_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$.

c. a_n est le $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule de $\sqrt{2}$ (avec $a_0 = 1$).

d. $a_n = \ln\left(\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$.

e. a_n est l'unique solution réelle de $x^3 + nx - 1 = 0$.

f. $a_n = \ln n$ (en considérant $(1-x)f(x)$, on donnera un équivalent en 1 de la somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$).

On étudiera les trois dernières sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence et calculer la somme f de $\sum a_n x^n$ pour :

a. $a_n = \dfrac{n^3+n+3}{n+1}$ b. $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{n!}$ c. $a_n = \dfrac{1}{n-(-1)^n}$ d. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ (*établir :* $2f = (1+4x)f'$).

2) Déterminer la somme de la série $\sum a_n$ pour :

a. $a_n = \dfrac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)}$. b. $a_n = \dfrac{1}{(3n)!}$.

Exercice 3

1) Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

a. $f : x \mapsto \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$.

c. $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$ ($\alpha \in \,]0;\pi[$). ☺ *On pourra commencer par* f'.

2) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$ est prolongeable par continuité en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soient b et c deux nombres complexes fixés et une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+b(n+1)a_{n+1}+ca_n=0\,.$$

1) En admettant que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_nx^n$ est strictement positif, montrer que la fonction $f:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est solution sur $]-R;R[$ de l'équation différentielle $(E):\ y''+by'+cy=0$.
2) Déterminer alors toutes les suites vérifiant la relation de récurrence ci-dessus pour $c=-b-1$.
3) Reprendre la question précédente en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n!\,a_n$.

Exercice 5

Soit une série entière $\sum a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$. On note *f* la somme de la série.

1) Dans cette question, on suppose que les a_n sont des réels positifs, que $R=1$ et que *f* est bornée sur $[0;1[$.
   a. Montrer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\sum\limits_{n\geq0}a_n$.
   b. Ce résultat subsiste-t-il quand les a_n sont de signe quelconque ?
2) Dans cette question, on veut prouver le <u>Théorème d'Abel</u> qui dit que :

   Si la série numérique $\sum a_nR^n$ converge, alors $\lim\limits_{x\to R^-}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nR^n$.

   a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $R=1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n=0$.

   Dans la suite, on suppose que les deux conditions ci-dessus sont réalisées.

   b. On pose $S_{-1}=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$. Montrer que pour tout $x\in\,]0;1[$ et tout $N\in\mathbb{N}$:

   $$\sum_{n=0}^{N}(S_n-S_{n-1})x^n=\sum_{n=0}^{N}S_n(x^n-x^{n+1})+S_Nx^{N+1}.$$

   c. En déduire que pour tout $x\in\,]0;1[$, $f(x)=(1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_nx^n$ et conclure.

Exercice 6

Soit $\sum a_nx^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

1) On suppose que $a_0=1$.
   a. Prouver qu'il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $c_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}=0$.
   b. Soit $r\in\,]0;R[$. Justifier qu'il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|a_nr^n\right|\leq M$.

   Les réels *r* et *M* ainsi fixés, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|c_n\right|\leq\dfrac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.

   c. En déduire que $\sum c_nx^n$ a un rayon de convergence non nul. Que conclure ?

2) Soit $\sum b_n x^n$ une autre série entière réelle de rayon de convergence 1 et de somme $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n>0$, que la série $\sum b_n$ diverge, et que $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell\in\mathbb{R}$.

Montrer que $g(x)\to+\infty$ quand $x\to 1^-$, puis que $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$.

Exercice 7

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0)=0$. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction :

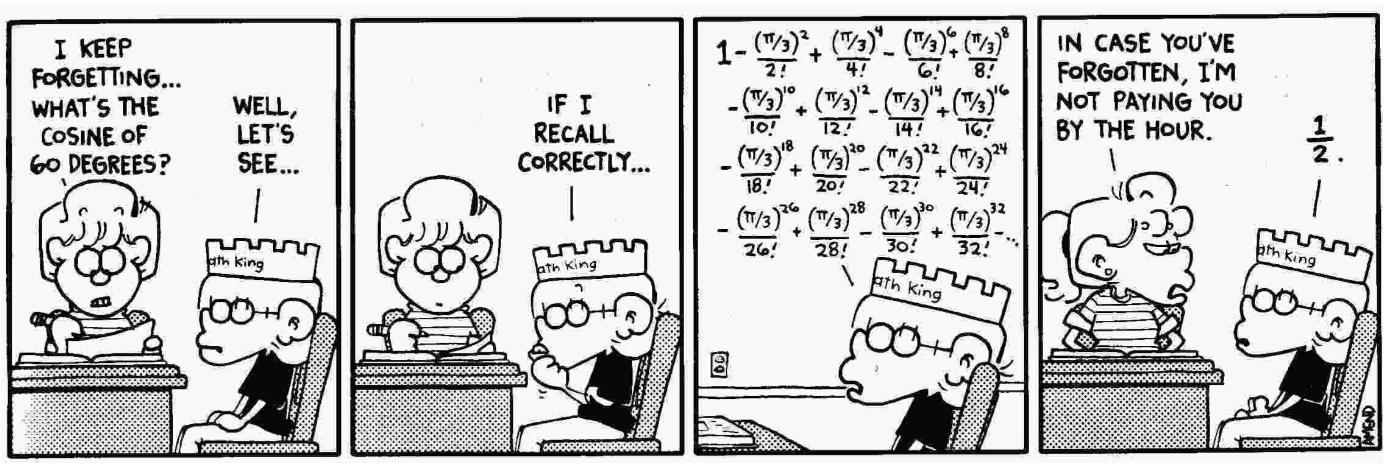
$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{x}.$$

On cherche à prouver que φ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, notée $\tilde{\varphi}$.
2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale entre *x* et 0, ainsi que la formule de Leibniz, montrez que pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)=\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrez que la fonction $\varphi^{(n)}$ a pour limite $\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ en 0.
4) En déduire que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5) Reprendre l'exercice en supposant que *f* est développable en série entière au voisinage de 0.



Exercice 8 (Mines)

Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n\geq 0}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}$.

Exercice 9 (Centrale)

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$. On pose $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^{p_n}$.

1) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$.
2) Déterminer la limite de f en 1^-.
3) Etudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.