TD du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le TD, sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1

Soient F, G et H trois sous-espaces de E.

1) Montrer que :
$$\dim(F+G+H) \leq \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim(F\cap H) - \dim(G\cap H) + \dim(F\cap G\cap H).$$
2) Soient F' (*resp.* G') un supplémentaire de $F\cap G$ dans F (*resp.* G). Montrer que :
$$F+G = (F\cap G)\oplus F' \oplus G'.$$
3) On suppose que $n \geq 3$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E n'est pas réduite à $\{0\}$.

Exercice 2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = g^2 = id_E$ et $fg + gf = 0$.

Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :
$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0_p \\ \hline 0_p & -I_p \end{array}\right) \text{ et } \left(\begin{array}{c|c} 0_p & I_p \\ \hline I_p & 0_p \end{array}\right).$$

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1) (f non injective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f est un diviseur de zéro à gauche).
2) (f non surjective) $\Leftrightarrow$ ($f = 0$ ou f est un diviseur de zéro à droite).

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, annulateur de f et tel que $P = P_1P_2$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ sans racine commune (réelle ou complexe).

On admet (ou rappelle) le théorème de Bézout pour les polynômes : avec les hypothèses faites ci-dessus sur P_1 et P_2, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$.

On veut prouver qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ où A et B sont des matrices carrées telles que $P_1(A) = 0$ et $P_2(B) = 0$. On pose $u = P_1(f)$ et $v = P_2(f)$.

1) Justifier que $uv = vu = 0$. En déduire que $\dim(\ker u) + \dim(\ker v) \geq n$.
2) Montrer que $\ker u \cap \ker v = \{0\}$, puis que $E = \ker u \oplus \ker v$.
3) Prouver que $\ker u$ est stable par f et que P_1 est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit par f sur $\ker u$ et conclure.
4) Peut-généraliser au cas où $P = P_1P_2 ... P_r$ avec $r \geq 2$ et où les P_i sont des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux sans racine commune (réelle ou complexe) ?

Exercice 5

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

1) Soient *A* et *B* deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

   Montrer que alors $A+B$ est nilpotente et $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B) = \exp(B) \times \exp(A)$.

2) Montrer que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 6

Soient *A* et *B* deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}$.

Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $aM + tr(M)A = B$?

Exercice 7

Soit *G* un sous-groupe fini de $GL(E)$ (partie finie non vide de $GL(E)$, stable par composition et passage à la réciproque). On appelle *r* le cardinal de *G*.

1) On suppose que $\sum_{g \in G} tr(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.
2) Montrer que $F = \{x \in E \setminus \forall\, g \in G,\, g(x) = x\}$ est un sous-espace de *E* de dimension $\frac{1}{r} \sum_{g \in G} tr(g)$.

Exercice 8

Soit *f* un endomorphisme de *E*. On pose $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker f^k$ et $I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Im} f^k$.

On dit que *f* est nilpotent s'il existe une puissance de *f* nulle. On appelle alors indice de nilpotence de *f* le plus petit entier naturel non nul α tel que $f^{\alpha} = 0$.

1) Dans cette question, E n'a pas besoin d'être de dimension finie.
   a. Montrer que les suites $\left(\ker f^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Im} f^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
   b. Montrer que si, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$, alors $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p$ pour tout entier $k \geq p$.
   c. Montrer que l'on a la même propriété pour les $\ker f^k$.
   d. Prouver que *N* et *I* sont stables par *f*.

Dans la suite, on suppose que *E* est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a. Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} f^p \neq \operatorname{Im} f^{p-1}$ si $p \neq 0$ et $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^p$ pour tout entier $k \geq p$.
   b. Montrer qu'alors $\ker f^p \neq \ker f^{p-1}$ si $p \neq 0$ et $\ker f^k = \ker f^p$ pour tout entier $k \geq p$.
   c. Montrer que $p \leq n$.
   d. Justifier que $N = \ker f^p$ et $I = \operatorname{Im} f^p$, et prouver que $E = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.
   e. Montrer que la suite $\left(rg(f^k) - rg(f^{k+1})\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 1 jusqu'au rang $p-1$.
   En déduire que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$ (quand $p \geq 2$) : $k \leq rg(f) - rg(f^{k+1}) \leq k\left[n - rg(f)\right]$.

3) On suppose ici que *f* est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe une puissance de *f* nulle. On appelle indice de nilpotence de *f* le plus petit entier naturel non nul α tel que $f^{\alpha}=0$.

   a. Montrer que l'indice de nilpotence de *f* est *p* (défini dans la question précédente).

   b. Justifier que $f^{n}=0$.

   c. On suppose que $f\neq 0$. Justifier qu'il existe un vecteur $x\in E$ tel que $f^{p-1}(x)\neq 0$ et montrer que la famille $\left(x, f(x), f^{2}(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.

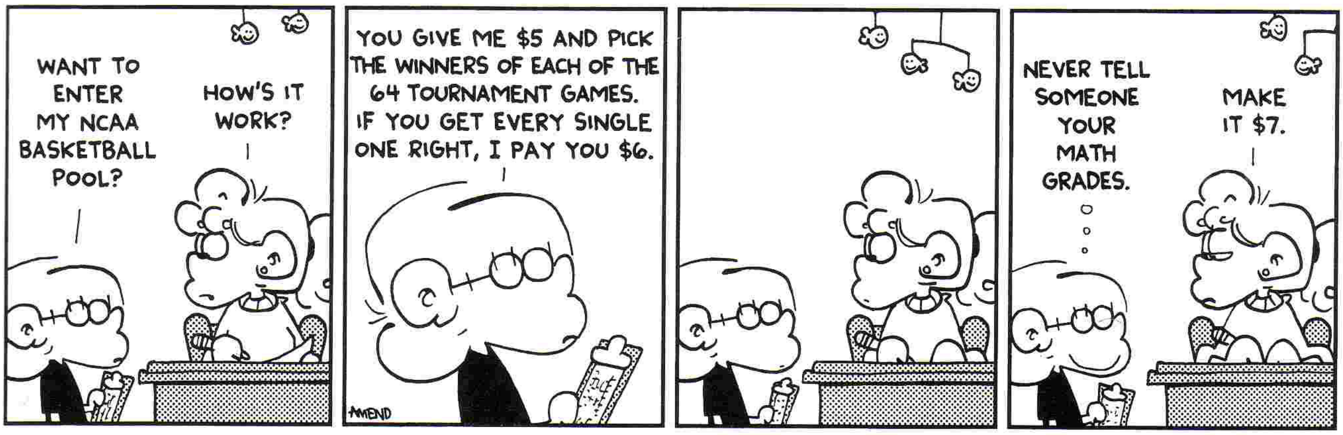
   d. On suppose ici que $p=n$. Prouver alors qu'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *f* est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On revient au cas où *f* est quelconque.

4) Montrer que l'endomorphisme induit par *f* sur *N* est nilpotent et que l'endomorphisme induit par *f* sur *I* appartient à $GL(I)$.

5) Existe-t-il une matrice $A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?



Exercice 9

Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le but de cet exercice est de prouver que la matrice *A* est de trace nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

1) Soit $f\in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Montrer que si pour tout $x\in \mathbb{K}^n$, la famille $\left(x, f(x)\right)$ est liée, alors *f* est une homothétie.

2) Que dire de *A* si elle est scalaire ?

3) Répondre alors au problème. ☺ *On pourra faire le sens direct par récurrence.*

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une famille de projecteurs de E.

On pose $f = f_1 + f_2 + \dots + f_p$.

1) Montrer que si f est aussi un projecteur de E, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f_1 \oplus \operatorname{Im} f_2 \oplus \dots \oplus \operatorname{Im} f_p$.

2) Prouver que f est un projecteur de E si et seulement si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.