TD du chapitre 7 : Compléments sur les déterminants

Dans tout le TD, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

1) Pour $n \geq 2$, calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}_n \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \binom{n-1}{1} & 1 \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{2} & \binom{n}{1} \end{vmatrix}_n$$

2) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ x^n/n! & x^{n-1}/(n-1)! & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$.

Exercice 2

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, avec $n \neq p$. Montrer que $\det AB = 0$ ou $\det BA = 0$.

Exercice 3

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $A + xB \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et on suppose que C et D commutent.

   a. On suppose que D est inversible. Montrer que $\det M = \det\left(AD - BC\right)$.

   b. On suppose que D n'est pas inversible. Soit $D(x) = D + xI_n$. Justifier qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \,]-\alpha, \alpha[\setminus\{0\}$, $\det\left(D(x)\right) \neq 0$.

   c. Montrer alors que le résultat de la question a. perdure quand D n'est pas inversible.

2) On pose $N = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

   a. On suppose que A et B commutent. Montrer que $\det N \geq 0$.

   b. Montrer que le résultat perdure même si A et B ne commutent pas.

   ☺ *Dans les deux questions, on pourra travailler dans $\mathbb{C}$.*

3) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On suppose ici que $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$(-x)^q \det(AB - xI_p) = (-x)^p \det(BA - xI_q).$$

☺ *On pourra multiplier* $\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}$ *par des matrices bien choisies.*

4) On pose ici $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Calculer $\det M$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.

Exercice 5

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$ où les a_i sont des scalaires deux à deux distincts.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est semblable à une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

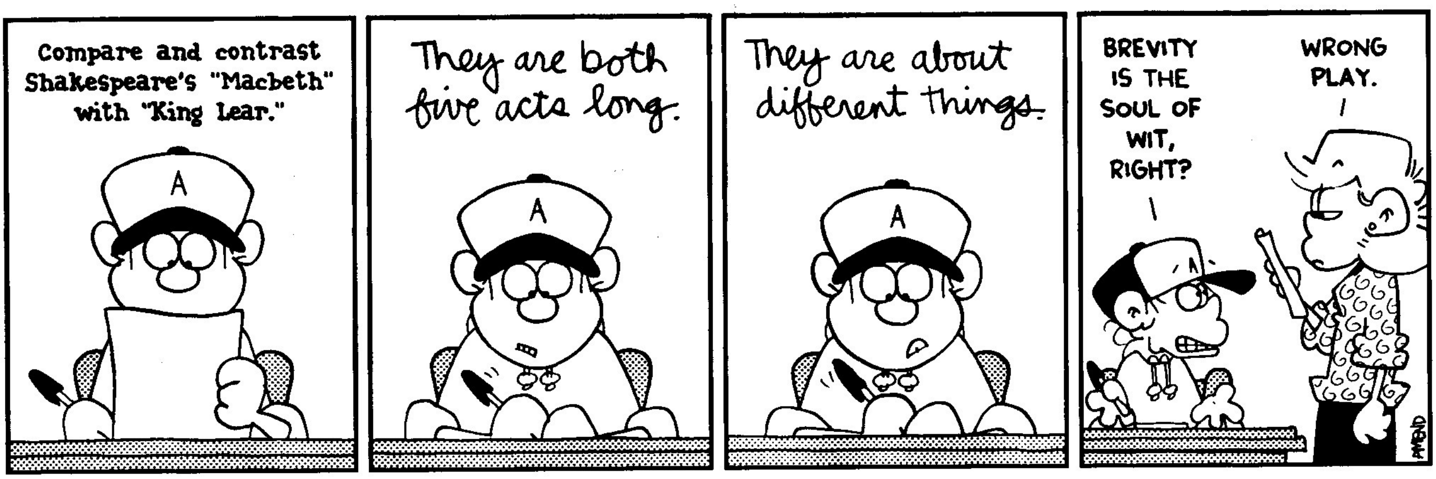
1) Montrer qu'il existe n matrices $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) A_i$.

2) En supposant que les λ_i sont deux à deux distincts, montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $P_i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A_i = P_i(A)$.

Exercice 7

Soient $f_1, f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$rg(f_1, f_2, \dots, f_n) = n \iff \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1 \le i, j \le n}\right] \neq 0.$$



Exercice 8 (Centrale)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$.

1) Montrer que $A^n = 0_n$.
2) Calculer $\det(A + I_n)$.
3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $MA = AM$. Calculer $\det(A + M)$.

   ☺ *On pourra commencer par le cas où M est inversible.*
4) Le résultat est-il encore vrai si *M* ne commute pas avec *A* ?

Exercice 9 (Mines)

Soient *A* et *B* dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Soit λ une valeur propre commune à *A* et *B*. Montrer qu'il existe une matrice *C* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non nulle, telle que $AC = CB = \lambda C$.
2) On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CB$. On pose $r = rg(C)$.

   Prouver qu'il existe un polynôme de degré *r* qui divise à la fois χ_A et χ_B, les polynômes caractéristiques respectifs de *A* et *B*.
3) Étudier la réciproque de la question précédente.