TD du chapitre 9 : Calcul différentiel

Exercice 1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(a)<f'(b)$.

Prouver le théorème de Darboux : f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que :

$$\forall\, k\in\big[f'(a),f'(b)\big],\ \exists\, c\in[a,b]\ \backslash\ f'(c)=k.$$

☺ *On pourra commencer par le cas où* $k=0$ *et montrer qu'alors f admet un minimum sur* $[a,b]$.

Exercice 2

Soit $f\in C^1\big(]0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que f' est bornée sur $]0,1]$. On veut prouver que *f* admet une limite à droite en 0.

On pose $M=\sup\limits_{x\in\,]0,1]}\left|f'(x)\right|$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=\dfrac{1}{2^n}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|f(x_{n+1})-f(x_n)\right|\le M\left|x_{n+1}-x_n\right|$, puis que pour tous $n,p\in\mathbb{N}$:
$$\left|f(x_{n+p})-f(x_p)\right|\le\frac{M}{2^p}.$$
2) Justifier alors que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sup\limits_{k\ge n}f(x_k)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie *L*.
4) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|u_n-f(x_n)\right|\le\dfrac{M}{2^n}$ puis que $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5) Démontrer alors que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=L$. ☺ *On pourra utiliser la technique de la question 1.*

Exercice 3

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, *E* un espace euclidien et $f:I\to E$

1) On suppose que *f* est deux fois dérivable et que $\|f\|$ est constante.
   Montrer que $\big(f\mid f''\big)$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?
2) On suppose que *f* est dérivable et qu'il existe un réel $k>0$ tel que pour tout $x\in I$, $\|f'(x)\|\le k\|f(x)\|$.
   Montrer que si la fonction *f* s'annule en un point de *I*, alors elle est nulle sur *I*.
   ☺ *On pourra utiliser la fonction* $g:x\mapsto\|f(x)\|^2e^{-2kx}$.

Exercice 4

Soient *E* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f:\mathbb{R}\to E$, continue en 0 et telle qu'il existe $k\in\,]0,1[$ et $\ell\in E$ tels que $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{t}\big[f(t)-f(kt)\big]\right)=\ell$.

1) Montrer que : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\, t\in[-\alpha,\alpha]\backslash\{0\},\ \forall\, i\in\mathbb{N},\ \left\|\dfrac{1}{k^it}\big[f(k^it)-f(k^{i+1}t)\big]-\ell\right\|\le\varepsilon$.
2) En déduire que *f* est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de *k* et ℓ.

Exercice 5

Soit le système $(S): X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$. Résoudre (S) quand :

a. A est une matrice de projection orthogonale sur un plan.
b. A est une nilpotente d'indice n.

☺ *On admettra que si* $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *vérifie* $A^{n-1}X_0 \neq 0$*, alors la famille* $\left(X_0, AX_0, A^2X_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

L'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté positivement par sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique.

Résoudre l'équation différentielle $\vec{f}' \wedge \vec{u} = \vec{f}$ d'inconnue $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec $\vec{u} = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$.

☺ *On pourra introduire le plan* $P = (\vec{u})^{\perp}$.

Exercice 7

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et deux fonctions a et b, respectivement de classe C^1 et C^0 sur I.

Déterminer une condition nécessaire sur a et b pour que l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ admette deux solutions non nulles y_1 et y_2 telles que pour tout $t \in I$, $y_2(t) = t\,y_1(t)$. Cette condition est-elle suffisante ?

Résoudre $y'' + 2t\,y' + (t^2+1)y = te^{-t^2/2}$.

Exercice 8

Soit (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ avec a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si h_1 et h_2 sont deux solutions de (E) sur I. On pose pour tout $t \in I$, $W(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h'_1(t) & h'_2(t) \end{vmatrix}$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (h_1, h_2) est libre.
- Il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.
- $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

☺ *On pourra montrer que W vérifie une équation différentielle simple.*

Exercice 9

Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$, puis calculer $f(x)$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence.

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$.

Exercice 10

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1) On suppose que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)+\alpha f(x)\right]=\ell$ où α et ℓ sont deux nombres complexes tels que tel que $\mathrm{Re}(\alpha)>0$.

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\ell}{\alpha}$.

2) On suppose que *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f''(x)+f'(x)+f(x)\right]=0$.

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) On suppose que *f* est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) et qu'il existe $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{C}^n$ tel que les racines de $P=X^n+\alpha_{n-1}X^{n-1}+\dots+\alpha_1X+\alpha_0$ ont toutes une partie réelle strictement négative et :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\dots+\alpha_1 f'(x)+\alpha_0 f(x)\right]=0.$$

   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Exercice 11

1) Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$.

   Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel *f* est de classe C^1.

   Les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent-elles ? Si oui, sont-elles égales ?

2) Montrer que $f:(x,y)\mapsto \dfrac{\sin x-\sin y}{\mathrm{sh}\, x-\mathrm{sh}\, y}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Dans les cas suivants, montrer que *f* ou *g* est différentiable sur son ensemble de définition et déterminer sa différentielle.

1) $f:\ \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\ ;\ P\ \mapsto\ \int_0^1 P^2$.
2) $f:\ GL_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A\ \mapsto\ A^{-1}$.

Exercice 13

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en a, $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en b et $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application admettant un maximum local en $\big(u(a),v(b)\big)$.

Montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\mapsto f(x,y)=\varphi\big(u(x),v(y)\big)$ admet un maximum local en (a,b).

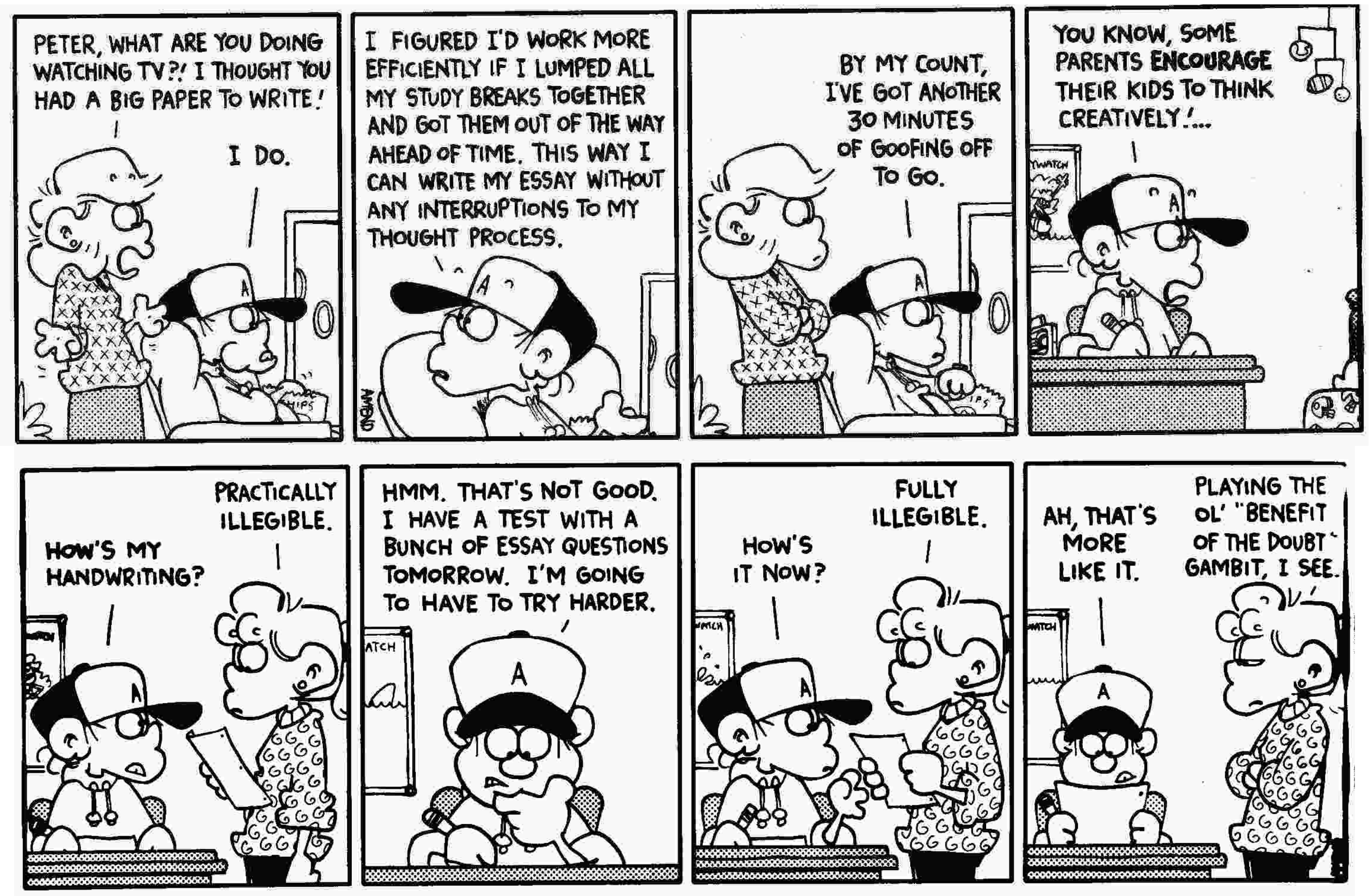
Exercice 14

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.
2) Donner une expression de *f* à l'aide d'une intégrale, mais sans signe somme.
3) Déterminer les extrema de *f*.



Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1.

1) Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si et seulement si la partie réelle $\frac{f'(t)}{f(t)}$ est toujours positive.
2) On suppose que $\lim_{t \to +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = a \in \mathbb{R}_-^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 17 (*Centrale*)

Soit *f* une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. On considère l'équation :

$$(E) : \quad y'' + f(x)y = 0.$$

1) Montrer que si y est une solution bornée de (E), alors yf est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Après avoir montré qu'elle existe, déterminer la limite de y' en $+\infty$.
2) Prouver que, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E), la fonction $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ est constante et en déduire que l'équation différentielle (E) admet des solutions non bornées.

Exercice 18 (*Mines*)

Déterminer toutes les fonctions *f* dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 19 (*Mines*)

Soit la fonction *H* définie par $H(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$.

Cette fonction est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 20 (*Mines*)

Soit *f* une fonction dérivable sur *U*, un ouvert de $\mathbb{R}$, et à images dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que si *f* admet un extremum local en $x_0 \in U$, alors $f'(x_0) = 0$.
2) Donner un théorème équivalent lorsque *U* est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et le démontrer.
3) Trouver les extrema de $f : (x,y) \mapsto |\sin(x+iy)|^2$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Exercice 21 (*Centrale*)

On dit qu'une application *f*, continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est α-positivement homogène s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x,y,z)$.

Soit *f* de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que *f* est α-positivement homogène si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \alpha f(x,y,z).$$

☺ *On pourra dériver par rapport à λ, à x, y et z constants et utiliser des changements de variable du type* $u = \lambda x$.

Exercice 22

Soient *E* est un espace euclidien et *u* un endomorphisme symétrique de *E*.

On note $f : E \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto (x \mid u(x))$ et $g : E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{(x \mid u(x))}{(x \mid x)}$.

Montrer que *f* et *g* sont différentiables sur leur ensemble de définition et déterminer leur différentielle.

On montrera que $dg(a) = 0$ si et seulement si *a* est un vecteur propre de *u*.