

TD n° 0 : Suites et séries numériques
Exercice 1

Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$. ☺ Pour la seconde, évaluer $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (somme partielle de la série harmonique).

Montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, où γ est une constante (constante d'Euler, $\gamma \approx 0,58$).

☺ On pourra poser, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1)$.

Exercice 3

Dans les deux cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

- 1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin u_n$.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est l'unique racine strictement positive de l'équation $\arctan\left(\frac{x}{n}\right) = nx^2$.

Exercice 4 (Mines 2017, PC)

On donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et de limite nulle.

Montrer que si l'ensemble D des réels $a > 0$, tels que $\sum u_n^a$ converge, est non vide, alors il est de la forme $[m, +\infty[$ ou $]m, +\infty[$. Donner un exemple où D est vide et un où $D =]m, +\infty[$.

Exercice 5

Soit $f \in C^1([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^x |f'(t)| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

- 1) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$.
 - a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t) dt$, puis que $|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt$.
 - b. En déduire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
 - c. Prouver alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- 2) Soient g et h deux fonctions de $C([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ telles que $h = o_{+\infty}(g)$. Montrer que si $\int_1^x g(t) dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, alors $\int_1^x h(t) dt$ aussi.

Dans la suite, on admet que pour $g \in C([1, +\infty[, \mathbb{R})$, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x |g(t)| dt \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x g(t) dt \in \mathbb{R}$.

3) A l'aide de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, montrer que la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

4) On pose $f(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$.

a. Montrer que $\int_1^x |f'(t)| dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

b. Prouver que $\forall x \in [1, +\infty[:$

$$\int_1^x f(t) dt = 2 \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du = 2 \left(\cos 1 - \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du \right).$$

c. En déduire que la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ converge.

