Notions et techniques de base à connaître en fin de sup

Généralités

Injection, surjection, bijection

Calculs de sommes et produits

- réindexation
- télescopage
- interversion de Σ

Bornes supérieures et inférieures (utilisation des définitions et des deux caractérisations : avec ε et séquentielle)

Valeur absolue (règles de calcul, gestion des inégalités/encadrements)

Partie entière

Complexes

- Linéarisation de $\cos^n x$, $\sin^n x$, développement de sommes de $\cos(kx)$, $\sin(kx)$
- Applications géométriques des complexes (ensembles des points, transformations)

Arithmétique

Analyse

Fonctions

Etude de fonctions : symétries de la courbe, variations, limites, asymptotes (verticale, horizontale ou oblique) et position relative, direction asymptotique, branche parabolique

Grands théorèmes (continuité et dérivation) : TVI, théorème de la bijection, théorème de Rolle, TAF, inégalité des accroissements finis ...

Bijection, nombre de racines, points fixes, inégalités

Etude du signe d'une fonction : factorisation, utilisation d'une fonction auxiliaire

Dérivées successives : calcul de dérivées $n^{\text{ièmes}}$ (conjecture + récurrence, formules connues, Leibniz, utilisation des complexes)

Bijections réciproques : Existence, continuité, dérivabilité, régularité d'une réciproque

Fonctions implicites : définition, variations, limites, comportement asymptotique ou en un point (équivalent, DL, DA)

Fonctions usuelles : fonctions puissances réelles, hyperboliques, circulaires réciproques

Intégration

Calculs d'intégrales

- IPP
- Changement de variable
- Intégrales de fonctions rationnelles

Etude d'une fonction définie par une intégrale (avec bornes variables)

Etude d'une suite d'intégrales

Inégalités avec des intégrales (Cauchy-Schwarz)

Sommes de Riemann

Equations différentielles

Equations homogènes (à coefficients constants pour l'ordre 2, solutions réelles et complexes)

Equations d'ordre 1 avec second membre (variation de la constante)

Raccordements

Equations d'ordre 2 avec second membre de la forme Ke^{ax}

Suites numériques

Etude de suite (variations, limite)

Suites adjacentes

Suites implicites

Suites récurrentes (d'ordre 1 en particulier)

Suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires doubles)

Séries numériques

Convergence et somme éventuelle de séries

Comparaison série-intégrale

Produits infinis (pour des facteurs strictement positifs).

Séries de référence : harmonique, séries de Riemann, géométriques, exponentielles

Exemples séries convergentes, divergentes, absolument convergentes, semi-convergentes

Analyse asymptotique

Comparaisons de fonctions/suites

Equivalents simples de fonctions/suites

Formules de Taylor

Développements limités

Calculs de limites

Développements asymptotiques (fonctions/suites)

Algèbre

Structures algébriques (MPSI)

Groupes, anneaux, corps.

Caractérisations de sous-groupes, anneaux, corps

Groupe symétrique

Algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels

Sous-espaces supplémentaires

Hyperplans

Familles libres, liées, génératrices, bases

- savoir montrer qu'une famille est libre (ou liée), génératrice
- savoir montrer qu'une famille est une base en dimension finie.

Dimension d'un (sous-)espace

Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes (déterminant)

Noyau, image, rang

Projecteurs et symétries

Espaces affines (MPSI)

Matrices

Calculs sur les matrices

Matrices et applications linéaires :

- savoir écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base
- savoir caractériser un endomorphisme à partir de sa matrice dans une base

Inversibilité, calcul d'inverse

- par opérations sur les lignes de la matrice et de I_n
- par résolution d'un système ($AX = Y$ donne $X = A^{-1}Y$)
- en exprimant les vecteurs de la base canonique en fonction des colonnes de la matrice
- ...

Matrices de passage

Matrices semblables

Echelonnage, pivot de Gauss

Résolution de systèmes

Calculs de déterminants

- opérations sur les lignes et les colonnes (pivots)
- développements
- Sarrus pour les déterminants 3x3 (mais vraiment en extrême recours)
- nature polynomiale en chaque coefficient
- déterminant de Vandermonde (MPSI).

Polynômes

Écritures diverses d'un polynôme : forme développée, forme factorisée

Distinction entre polynôme (formel) et fonction polynôme

Bases de $\mathbb{K}_n[X]$

Ordre de multiplicité d'une racine

Division euclidienne des polynômes

Somme et produit des racines

Décomposition en éléments simples (MPSI)

Espaces Préhilbertiens

Produits scalaires

Inégalités (Cauchy-Schwarz)

Orthogonalité, orthogonal d'un sev

Orthonormalisation, méthode de Gram-Schmidt

Projections orthogonales, distances

Probabilités

Dénombrement : combinaison, arrangements, p -listes

Loi de probabilité

Lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale)

Espérance, variance, écart-type

Probabilités conditionnelles, probabilités totales, formules de Bayes

Couples de variables aléatoires

Indépendance (deux à deux, mutuelle)

Covariance (MPSI)

Formules à connaître par cœur

- Identités remarquables généralisées : formule du binôme $(a + b)^n$, formule de Bernoulli $a^n - b^n$
- Formules de trigonométrie (circulaire et hyperbolique)
- Développements limités usuels
- Dérivées usuelles
- Primitives usuelles