

Corrigé du DM n° 1

1) a. On a $a_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$, donc $|a_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$.

Comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et $\sum b_n$ converge, la série $\sum |a_n|$ converge et ainsi :

$$\sum a_n \text{ converge absolument.}$$

De plus, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$|a_n| \leq \varepsilon b_n.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

Or, par inégalité triangulaire, on a $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|$, donc pour tout entier $n \geq N$:

$$|R_n(a)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = \varepsilon R_n(b).$$

Ceci prouve que :

$$R_n(a) = o_{n \rightarrow +\infty}(R_n(b))$$

b. On suppose que $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang et $|a_n| = a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Alors, comme $\sum b_n$ converge, la série $\sum |a_n|$ converge et ainsi :

$$\sum a_n \text{ converge absolument.}$$

La relation $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ se récrit $a_n - b_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$. On peut donc utiliser le résultat de la question précédente :

$$R_n(a - b) = o_{n \rightarrow +\infty}(R_n(b)).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(a - b) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = R_n(a) - R_n(b)$, donc :

$$R_n(a) - R_n(b) = o_{n \rightarrow +\infty}(R_n(b)).$$

Soit :

$$R_n(a) \sim_{n \rightarrow +\infty} R_n(b)$$

2) a. Comme les séries sont positives, si $a_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$ et $\sum a_n$ diverge, alors :

$$\boxed{\sum b_n \text{ diverge.}}$$

Les suites étant positives, on a de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(b) = +\infty.$$

Comme ci-dessus, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$0 \leq a_n \leq \varepsilon b_n.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N+1$:

$$0 \leq \sum_{k=N+1}^n a_k \leq \varepsilon \sum_{k=N+1}^n b_k \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n b_k \Leftrightarrow 0 \leq S_n(a) - S_N(a) \leq \varepsilon [S_n(b) - S_N(b)] \leq \varepsilon S_n(b).$$

Ceci donne $0 \leq S_n(a) \leq \varepsilon S_n(b) + S_N(a)$ et avec $S_n(b) > 0$ (la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive), on peut écrire :

$$0 \leq \frac{S_n(a)}{S_n(b)} \leq \varepsilon + \frac{S_N(a)}{S_n(b)}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_N(a)}{S_n(b)} = 0$ (car $S_N(a)$ est une constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(b) = +\infty$), donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour

tout entier $n \geq N'$, $0 < \frac{S_N(a)}{S_n(b)} \leq \varepsilon$ et ainsi, pour tout entier $n \geq \max(N+1, N')$, on a :

$$0 \leq \frac{S_n(a)}{S_n(b)} \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(a)}{S_n(b)} = 0$ et donc que :

$$\boxed{S_n(a) = o_{n \rightarrow +\infty}(S_n(b))}$$

b. Comme les séries sont positives, si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ les séries sont de même nature, donc si $\sum a_n$ diverge :

$$\boxed{\sum b_n \text{ diverge.}}$$

De plus, si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, on a $a_n - b_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$, donc $|a_n - b_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$.

La série $\sum |a_n - b_n|$ est à termes positifs, donc :

- soit elle converge et dans ce cas, $\sum_{k=0}^n |a_k - b_k| = o_{n \rightarrow +\infty}(S_n(b))$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(b) = +\infty$;
- soit elle diverge et dans ce cas, on montre comme plus haut que $\sum_{k=0}^n |a_k - b_k| = o_{n \rightarrow +\infty}(S_n(b))$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n(a) - S_n(b)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n b_k \right| = \left| \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k - b_k|.$$

Donc, $\sum_{k=0}^n |a_k - b_k| = o_{n \rightarrow +\infty}(S_n(b))$ entraîne $S_n(a) - S_n(b) = o_{n \rightarrow +\infty}(S_n(b))$ et ainsi :

$$\boxed{S_n(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n(b)}$$

3) Soit un entier $p \geq 2$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}$.

On a $\frac{1}{n^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ et comme $p \geq 2$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^p}$ converge. Alors, d'après la question 1, $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-2)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-2)(n+p-1)} = \frac{(n+p-1) - n}{n(n+1)\dots(n+p-2)(n+p-1)} = (p-1)u_n.$$

Donc, on a par télescope :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-2)} - \frac{1}{(k+1)\dots(k+p-2)(k+p-1)} \right) \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-2)} - \frac{1}{(k+1)\dots(k+p-2)(k+p-1)} \right) \\ &= \frac{1}{p-1} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p-1}}$, on obtient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}}$ et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}}}$$

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^p} + \frac{1}{p-1} \frac{1}{(n+1)^{p-1}} = \frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{n^p} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-(p-1)} \right) \\ &= \frac{1}{n^p} \left[1 - \frac{p}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right] - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \left(\frac{p-1}{n} - \frac{(p-1)p}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = -\frac{p}{2} \frac{1}{n^{p+1}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{p+1}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{p}{2} \frac{1}{n^{p+1}}$. Comme $p \geq 2$, la série $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ converge, donc la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge aussi et d'après la question 1 :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{p}{2} \frac{1}{k^{p+1}} \right).$$

Comme $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_n$ et ainsi :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{p}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}.$$

D'après la question précédente, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p(n-1)^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{pn^p}$ et ainsi :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^p}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{2n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)}$$

5) Commençons par prouver que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On a :

$$\begin{aligned} (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n) + \frac{1}{2n} &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum [(H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)]$ converge aussi et, ainsi, la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On appelle γ sa limite.

Supposons qu'il existe trois réels a , b et c tels que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = H_n - \gamma - \ln n - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2}.$$

Remarquons que quels que soient a et b , on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour obtenir un équivalent de u_n en $\frac{1}{n^3}$, on voudrait obtenir un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en $\frac{1}{n^4}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \gamma - \ln(n+1) - \frac{a}{n+1} - \frac{b}{(n+1)^2} - H_n + \gamma + \ln n + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \\
 &= \frac{1-a}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-2} \right] - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{a}{n} + \frac{1-a}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) + \frac{b}{n^2} \left[\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] \\
 &\quad - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} \right) \right) \\
 &= \frac{2a-1}{2n^2} + \frac{2-3a+6b}{3n^3} - \frac{3-4a+12b}{4n^4} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} \right)
 \end{aligned}$$

Pour obtenir un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en $\frac{1}{n^4}$, il faut :

$$\begin{cases} 2a-1=0 \\ 2-3a+6b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{12} \end{cases}$$

On a alors :

$$u_{n+1} - u_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} \right).$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^4}$ est strictement positive et converge, donc, d'après la question 1 :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \right).$$

Comme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$ (question 3), on obtient, avec $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = -u_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right).$$

Ainsi, $u_n = H_n - \gamma - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$ et donc :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)}$$