Corrigé du DM n° 2

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera $[M]_{i,j}$ ses coefficients.

1) On a $C_A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, la matrice nulle commute avec A et est un polynôme en A (le polynôme nul évalué en A), donc C_A et $\mathbb{K}[A]$ ne sont pas vides.

Soient $M, N \in C_A$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Par bilinéarité du produit matriciel :

$$(M+\lambda N)A = MA + \lambda NA = AM + \lambda AN = A(M+\lambda N).$$

Donc, $M + \lambda N \in C_A$.

- $P + \lambda Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $P(A) + \lambda Q(A) = (P+\lambda Q)(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Ainsi, C_A et $\mathbb{K}[A]$ sont deux parties vides de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par combinaisons linéaires, donc :

$$\boxed{C_A \text{ et } \mathbb{K}[A] \text{ sont des sous-espaces de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P(A)A = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k\right)A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^{k+1} = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k\right) = A\,P(A).$$

Donc, $P(A) \in C_A$. Ceci étant vrai pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a bien :

$$\boxed{\mathbb{K}[A] \subset C_A}$$

2) a. On a $\left(Q^{-1}AQ\right)^0 = I_n = Q^{-1}I_n Q = Q^{-1}A^0 Q$ et si, pour $k \in \mathbb{N}$, $\left(Q^{-1}AQ\right)^k = Q^{-1}A^k Q$, alors :

$$\left(Q^{-1}AQ\right)^{k+1} = \left(Q^{-1}AQ\right)^k \left(Q^{-1}AQ\right) = Q^{-1}A^k QQ^{-1}AQ = Q^{-1}A^k AQ = Q^{-1}A^{k+1}Q.$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(Q^{-1}AQ\right)^k = Q^{-1}A^k Q$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P\left(Q^{-1}AQ\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(Q^{-1}AQ\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(Q^{-1}A^k Q\right) = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k\right)Q = Q^{-1}P(A)Q.$$

Alors, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathbb{K}[Q^{-1}AQ] &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X], M = P\left(Q^{-1}AQ\right) \\ &\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X], M = Q^{-1}P(A)Q \\ &\Leftrightarrow M \in \left\{Q^{-1}P(A)Q \setminus P \in \mathbb{K}[X]\right\} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\mathbb{K}[Q^{-1}AQ] = \left\{Q^{-1}P(A)Q \setminus P \in \mathbb{K}[X]\right\}}$$

b. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en posant $M = QBQ^{-1}$, soit $B = Q^{-1}MQ$, on a :

$$\begin{aligned} B \in C_{Q^{-1}AQ} &\Leftrightarrow \left(Q^{-1}AQ\right)B = B\left(Q^{-1}AQ\right) \\ &\Leftrightarrow \left(Q^{-1}AQ\right)\left(Q^{-1}MQ\right) = \left(Q^{-1}MQ\right)\left(Q^{-1}AQ\right) \\ &\Leftrightarrow Q^{-1}AMQ = Q^{-1}MAQ \\ &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow M \in C_A \\ &\Leftrightarrow B = Q^{-1}MQ, M \in C_A \\ &\Leftrightarrow B \in \left\{Q^{-1}MQ \setminus M \in C_A\right\} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{C_{Q^{-1}AQ} = \left\{Q^{-1}MQ \setminus M \in C_A\right\}}$$

3) Si $C_{Q^{-1}AQ} = \mathbb{K}[Q^{-1}AQ]$ pour tout $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, alors en particulier pour $Q = I_n$, on obtient $C_A = \mathbb{K}[A]$.

Supposons que $C_A = \mathbb{K}[A]$. Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[Q^{-1}AQ] &= \left\{Q^{-1}P(A)Q \setminus P \in \mathbb{K}[X]\right\} \\ &= \left\{Q^{-1}MQ \setminus M \in \mathbb{K}[A]\right\} \\ &= \left\{Q^{-1}MQ \setminus M \in C_A\right\} \\ &= C_{Q^{-1}AQ} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{C_A = \mathbb{K}[A] \text{ si et seulement si pour tout } Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ C_{Q^{-1}AQ} = \mathbb{K}[Q^{-1}AQ].}$$

4) a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $DM = MD$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$[DM]_{i,j} = [MD]_{i,j} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}[M]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[D]_{k,j} \quad \Leftrightarrow \quad a_i [M]_{i,j} = [M]_{i,j}\, a_j .$$

Soit $[M]_{i,j}(a_j - a_i) = 0$. Comme les a_i sont deux à deux distincts, on obtient :

$$DM = MD \quad \Leftrightarrow \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j, [M]_{i,j} = 0.$$

Autrement dit, M et D commutent si et seulement si M est diagonale et donc :

$$\boxed{C_D = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})}$$

b. Remarquons déjà que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\deg L_i = n-1$, donc $L_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

Soient des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_n L_n = 0$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\lambda_1 L_1(a_i) + \ldots + \lambda_n L_n(a_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i L_i(a_i) = \lambda_i = 0.$$

Ainsi, la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est libre et comme elle contient $n = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X]$ polynômes :

$$\boxed{(L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$

c. Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Procédons par analyse synthèse.

Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

On peut alors écrire $P = \alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_n L_n$ où les α_i sont les coordonnées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$P(a_i) = \alpha_1 L_1(a_i) + \ldots + \alpha_n L_n(a_i) = \alpha_i = b_i.$$

Donc, si P existe, il est unique et vaut $P = b_1 L_1 + \ldots + b_n L_n$.

Réciproquement, en posant $P = b_1 L_1 + \ldots + b_n L_n$, on a bien $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ (comme ci-dessus).

Finalement, pour tout $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\boxed{\text{Il existe bien un unique polynôme } P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ tel que pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ P(a_i) = b_i.}$$

d. Prouvons que $C_D = \mathbb{K}[D]$.

D'après la question a, on a $C_D = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, donc tout matrice de C_D s'écrit $diag(b_1, \ldots, b_n)$.

D'après la question précédente, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$, donc :

$$diag(b_1, \ldots, b_n) = diag(P(a_1), \ldots, P(a_n)) = P(diag(a_1, \ldots, a_n)) = P(D).$$

Ainsi, tout matrice de C_D s'écrit $P(D)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$, donc appartient à $\mathbb{K}[D]$.

Ceci prouve que $C_D \subset \mathbb{K}[D]$ et comme on avait déjà $\mathbb{K}[D] \subset C_D$ d'après la question 1, on obtient :

$$C_D = \mathbb{K}[D].$$

Or, A est semblable à D, donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = Q^{-1}DQ$ et d'après la question 3, on a $C_{Q^{-1}DQ} = \mathbb{K}[Q^{-1}DQ]$, soit :

$$\boxed{C_A = \mathbb{K}[A]}$$

5) Si A est nilpotente d'indice $p \geq 1$, alors $A^{p-1} \neq 0_n$ (et $A^p = 0_n$), donc :

$$\boxed{\text{Il existe bien un vecteur } Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } A^{p-1}Z \neq 0.}$$

Soient des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ tels que $\lambda_0 Z + \lambda_1 AZ + \ldots + \lambda_{p-1}A^{p-1}Z = 0$.

Supposons que $\{i \in [\![0, p-1]\!],\ \lambda_i \neq 0\} \neq \varnothing$ (l'un au moins de λ_i est non nul).

Posons alors $m = \min\{i \in [\![0, p-1]\!],\ \lambda_i \neq 0\} \neq \varnothing$. On a ainsi $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{m-1} = 0$ et $\lambda_m \neq 0$, d'où :

$$\lambda_0 Z + \lambda_1 AZ + \ldots + \lambda_{p-1}A^{p-1}Z = \lambda_m A^m Z + \ldots + \lambda_{p-1}A^{p-1}Z = 0.$$

En multipliant à gauche par A^{p-1-m} ($m \leq p-1$ donc $p-1-m \geq 0$), on obtient :

$$\lambda_m A^{p-1}Z + \lambda_{m+1}A^p Z + \ldots + \lambda_{p-1}A^{2p-2-m}Z = \lambda_m A^{p-1}Z = 0.$$

Comme $A^{p-1}Z \neq 0$, on obtient $\lambda_m = 0$ qui est absurde.

Ainsi, $\{i \in [\![0, p-1]\!],\ \lambda_i \neq 0\} = \varnothing$, autrement dit, $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La famille } \left(A^{p-1}Z, A^{p-2}Z, \ldots, AZ, Z\right) \text{ est libre.}}$$

La famille $\left(A^{p-1}Z, A^{p-2}Z, \ldots, AZ, Z\right)$ est donc une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui est de dimension n, donc :

$$\boxed{p \leq n}$$

6) a. Comme A est une matrice nilpotente d'indice n, il existe un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que la famille $\left(A^{n-1}Z, A^{n-2}Z, \ldots, AZ, Z\right)$ est libre. Comme cette famille contient $n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteurs, c'est un base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, notons $e_k=A^{n-k}Z$, vecteur de $\mathbb{K}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ la base de $\mathbb{K}^n$ ainsi définie et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, on a $f(e_1)=AA^{n-1}Z=A^nZ=0$ et pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, $f(e_k)=AA^{n-k}Z=A^{n-(k-1)}Z=e_{k-1}$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&0&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{A\text{ est semblable à la matrice } N=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&0&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}).\ .}$$

b. Reprenons la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ introduite ci-dessus.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$ fixé.

Prouvons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ que $f^k(e_i)=\begin{cases}e_{i-k} & \text{pour } k<i\\ 0 & \text{pour } k\geq i\end{cases}$.

- On a vu que $f(e_i)=\begin{cases}e_{i-1} & \text{pour } i\geq 2\\ 0 & \text{pour } i=1\end{cases}$, donc la propriété est vraie au rang $k=1$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}^*$. On a alors :

$$f^{k+1}(e_i)=f\left(f^k(e_i)\right)=\begin{cases}f(e_{i-k}) & \text{pour } k<i\\ f(0) & \text{pour } k\geq i\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f(e_{i-k}) & \text{pour } i-k>1\\ f(e_1) & \text{pour } i-k=1\\ f(0) & \text{pour } k\geq i\end{cases}=\begin{cases}e_{i-k-1} & \text{pour } k+1<i\\ 0 & \text{pour } k+1=i\\ 0 & \text{pour } k+1\geq i+1\end{cases}=\begin{cases}e_{i-(k+1)} & \text{pour } k+1<i\\ 0 & \text{pour } k+1\geq i\end{cases}$$

  La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

On obtient alors, avec $N^k=M_{\mathcal{B}}(f^k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{N^k=\begin{cases}\left(\begin{array}{c:c}0_{n-k,k} & I_{n-k}\\ \hdashline 0_k & 0_{k,n-k}\end{array}\right) & \text{pour } 1\leq k\leq n-1\\ 0_n \quad \text{pour } k\geq n\end{cases}}$$

c. Comme A est semblable à N, pour prouver que $C_A=\mathbb{K}[A]$, il suffit, comme dans la question 4d, de prouver que $C_N=\mathbb{K}[N]$, soit seulement que $C_N\subset\mathbb{K}[N]$, puisque l'inclusion réciproque est acquise d'après la question 1.

Soit alors $M \in C_N$.

En remarquant que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $[N]_{i,j} = \delta_{i+1,j}$, on a :

$$[MN]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} [M]_{i,k} [N]_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} [M]_{i,k} \delta_{k+1,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 1 \\ [M]_{i,j-1} & \text{pour } j \geq 2 \end{cases}$$

$$[NM]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} [N]_{i,k} [M]_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i+1,k} [M]_{k,j} = \begin{cases} [M]_{i+1,j} & \text{pour } i \leq n-1 \\ 0 & \text{pour } i = n \end{cases}$$

Donc, $[M]_{2,1} = ... = [M]_{n,1} = 0$, $[M]_{n,1} = ... = [M]_{n,n-1} = 0$ et pour tous $i, j \in [\![2,n]\!]$:

$$[M]_{i-1,j-1} = [M]_{i,j}$$

En posant $[M]_{1,j} = a_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on obtient, avec les résultats de la question précédente :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 I_n + a_2 N + a_3 N^2 + ... + a_{n-1} N^{n-2} + a_n N^{n-1} \in \mathbb{K}[N].$$

Ceci prouve que $C_N \subset \mathbb{K}[N]$, donc que $C_N = \mathbb{K}[N]$ et finalement, que l'on a bien :

$$\boxed{C_A = \mathbb{K}[A]}$$

7) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = 0_n$, donc A est nilpotente d'indice $p = 2 < 3$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a $MA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $AM = \begin{pmatrix} c & c' & c'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$AM = MA \iff \begin{pmatrix} c & c' & c'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c = c' = b = 0 \\ a = c'' \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & b' & b'' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & b' & b'' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, a', a'', b', b'') \in \mathbb{K}^5 \right\}.$$

Or, $A^2 = 0_n$, donc pour tout $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + ... \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A) = aI_3 + bA = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et ainsi $C_A \neq \mathbb{K}[A]$. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Le résultat de la question précédente n'est plus forcément vrai quand } p < n.}$$