Corrigé du DS de Mathématiques n° 1
Problème 1
I – Résultats préliminaires
Q1. Posons :

$$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n), \mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n),$$

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

On a $M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) = \left(\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(e_j) &= \sum_{i=1}^n c_{i,j} g_i = g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^n a_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} g(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,j} \left(\sum_{i=1}^n b_{i,k} g_i\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,j} b_{i,k} g_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} g_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}\right) g_i \end{aligned}$$

Par unicité de coordonnées dans la base $\mathcal{G}$, on obtient $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui prouve que l'on a bien :

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$$

Q2. D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) &= M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(id \circ f) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(id)M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f) \\ &= M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(id)M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f \circ id) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(id)M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(id) \end{aligned}$$

En posant $P = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(id)$ et $Q = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(id)$, on a bien $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ car id est bijective et :

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = PM_{\mathcal{E}}(f)Q$$

II – Étude de deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Q3. Le produit matriciel étant une application bilinéaire de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\Phi_{P,Q}$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à images dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et linéaire.

De plus, la transposition étant linéaire, $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Or, $\Psi_{P,Q} = \Phi_{P,Q} \circ \tau$ est la composée de deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement :

$$\Phi_{P,Q} \text{ et } \Psi_{P,Q} \text{ sont bien des endomorphismes de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\Phi_{P,Q}(M) = PMQ = N \Leftrightarrow P^{-1}(PMQ)Q^{-1} = P^{-1}NQ^{-1} \Leftrightarrow M = P^{-1}NQ^{-1}.$$

Ceci prouve que $\Phi_{P,Q}$ est bijective, de réciproque $\Phi_{P,Q}^{-1} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ N \mapsto P^{-1}NQ^{-1} \end{cases}$.

La transposition étant involutive ($\tau \circ \tau = id$), elle est bijective. Alors, $\Psi_{P,Q} = \Phi_{P,Q} \circ \tau$ est la composée de deux bijections, donc est bijective, de réciproque $\tau^{-1} \circ \Phi_{P,Q}^{-1} = \tau \circ \Phi_{P,Q}^{-1}$.

Ainsi :

$\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont bien des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Et on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{P,Q}^{-1} &= \Phi_{P^{-1},Q^{-1}} \\ \Psi_{P,Q}^{-1} &: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto (P^{-1}MQ^{-1})^T = (P^{-1})^T M^T (Q^{-1})^T = (P^T)^{-1} M^T (Q^T)^{-1} = \Psi_{(P^T)^{-1},(Q^T)^{-1}} \end{cases} \end{aligned}$$

Q4. Comme P et Q sont inversibles, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} rg(\Phi_{P,Q}(M)) &= rg(PMQ) = rg(PM) = rg(M) \\ rg(\Psi_{P,Q}(M)) &= rg(PM^T Q) = rg(PM^T) = rg(M^T) = rg(M) \end{aligned}$$

Ainsi :

$\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

Q5. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \det \Phi_{P,Q}(M) &= \det(PMQ) = (\det P) \times (\det M) \times (\det Q) = (\det P) \times (\det Q) \times (\det M) \\ \det \Psi_{P,Q}(M) &= \det(PM^T Q) = (\det P) \times (\det M^T) \times (\det Q) = (\det P) \times (\det Q) \times (\det M^T) \\ &= (\det P) \times (\det Q) \times (\det M) = \det \Phi_{P,Q}(M) \end{aligned}$$

Par définition, $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant si et seulement si pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det \Phi_{P,Q}(M) = \det \Psi_{P,Q}(M) = \det M$, soit :

$$(\det P) \times (\det Q) \times (\det M) = \det M.$$

Or, ceci n'est vrai pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que si $(\det P) \times (\det Q) = 1$, donc :

$\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant si et seulement si $(\det P) \times (\det Q) = 1$.

Q6. Soient $P, Q, P', Q' \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

- $\Phi_{P,Q} \circ \Phi_{P',Q'}(M) = \Phi_{P,Q}(\Phi_{P',Q'}(M)) = (PP')M(Q'Q)$;
- $\Psi_{P,Q} \circ \Phi_{P',Q'}(M) = \Psi_{P,Q}(\Phi_{P',Q'}(M)) = P(P'MQ')^T Q = (PQ'^T)M^T(P'^T Q)$;

Or, $PP', Q'Q, PQ'^T, P'^T Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et donc :

- $\Phi_{P,Q} \circ \Phi_{P',Q'} = \Phi_{PP',Q'Q} \in \mathcal{L}_1$ (et $\mathcal{L}_1$ est stable par composition) ;
- $\Psi_{P,Q} \circ \Phi_{P',Q'} = \Psi_{PQ'^T, P'^T Q} \in \mathcal{L}_2$.

Alors, avec $\Psi_{P',Q'} = \Phi_{P',Q'} \circ \tau$:

- $\Phi_{P,Q} \circ \Psi_{P',Q'} = \Phi_{P,Q} \circ \Phi_{P',Q'} \circ \tau = \Phi_{PP',Q'Q} \circ \tau = \Psi_{PP',Q'Q} \in \mathcal{L}_2$;
- $\Psi_{P,Q} \circ \Psi_{P',Q'} = \Psi_{P,Q} \circ \Phi_{P',Q'} \circ \tau = \Psi_{PQ'^T, P'^T Q} \circ \tau = \Phi_{PQ'^T, P'^T Q} \circ \tau \circ \tau = \Phi_{PQ'^T, P'^T Q} \in \mathcal{L}_1$.

Finalement, pour tous $\Theta, \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, on a encore $\Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, et donc :

$$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \text{ est stable par composition.}$$

Q7. On a $\Phi_{I_n, I_n} = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, donc $\tau = \Phi_{I_n, I_n} \circ \tau = \Psi_{I_n, I_n}$ et ainsi :

$$\tau \in \mathcal{L}_2$$

Supposons que $\tau \in \mathcal{L}_1$.

Alors, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\tau = \Phi_{P,Q}$, soit pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\tau(M) = M^T = \Phi_{P,Q}(M) = PMQ.$$

En particulier, pour $M = I_n$, on obtient $PQ = I_n$, donc $Q = P^{-1}$ et pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M^T = PMP^{-1} \Leftrightarrow M^T P = PM.$$

En notant $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($E_{i,j}$ ne contient que des 0, sauf un 1 au croisement de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne), on a $E_{i,j} = (\delta_{i,k} \delta_{j,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$.

Si $P = (\alpha_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$E_{i,j}^T P = P E_{i,j} \Leftrightarrow E_{j,i} P = P E_{i,j} \Leftrightarrow (\delta_{j,k} [P]_{i,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} = ([P]_{k,i} \delta_{j,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$$

Ainsi :

- si $k \neq j = \ell$, on obtient $[P]_{k,i} = 0$;
- $i = \ell \neq k = j$, on obtient $[P]_{i,i} = 0$.

Finalement, $P = 0_n$, ce qui est absurde pour une matrice inversible.

Ainsi, supposer que $\tau \in \mathcal{L}_1$ mène à une absurdité, donc :

$$\tau \notin \mathcal{L}_1$$

Q8. Supposons que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ soit non vide. Soit $\Theta \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Il existe alors $P, Q, P', Q' \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\Theta = \Phi_{P,Q} = \Psi_{P',Q'} = \Phi_{P',Q'} \circ \tau$.

On a vu dans la question **Q3** que $\Phi_{P',Q'}^{-1} = \Phi_{P'^{-1},Q'^{-1}}$, donc :

$$\tau = \Phi_{P',Q'}^{-1} \circ \Phi_{P',Q'} \circ \tau = \Phi_{P',Q'}^{-1} \circ \Phi_{P,Q} = \Phi_{P'^{-1},Q'^{-1}} \circ \Phi_{P,Q}.$$

Or, d'après la question **Q6**, $\Phi_{P'^{-1},Q'^{-1}} \circ \Phi_{P,Q} \in \mathcal{L}_1$, donc $\tau \in \mathcal{L}_1$, ce qui contredit le résultat de la question précédente. Ainsi, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ non vide mène à une absurdité, donc :

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$$

III – Endomorphismes de rang donné

III.A –

Q9. Rappelons $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la $j^{\text{ième}}$ colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Ceci permet d'écrire immédiatement:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n$$

III.B –

Q10. Comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \text{Vect}(\mathcal{B}_2) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \ker f = \{0\}.$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_k f(e_k) = 0$. Comme f est linéaire, ceci se récrit :

$$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in \ker f.$$

Et comme $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, on a $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap \ker f = \{0\}$, soit $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k = 0$. Enfin, comme la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est libre (car extraite d'une base), on peut écrire $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Ceci prouve que :

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_k))$ est libre.

Comme la famille $(f(e_1), \dots, f(e_k))$ est une famille libre de k vecteurs en dimension n , on a :

$$k < n$$

Q11. On a $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ et pour tout $e \in \mathcal{B}_2$, $f(e) = 0$.

Avec $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_k), f_{k+1}, \dots, f_n)$, on obtient :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0_{k, n-k} \\ \hline 0_{n-k, k} & 0_{n-k} \end{array} \right) = J_{n, k}$$

Remarquons que comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\text{rg}(e_1, \dots, e_k) + \text{rg}(\mathcal{B}_2) = k + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Et, avec le théorème du rang, on obtient :

$$\underline{\text{rg}(f) = n - \dim \ker f = k}.$$

III.C –

Q12. Appelons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

Si $r = 0$, on a $M = 0_n = \Phi_{P, Q}(0_n) = \Phi_{P, Q}(J_{n, 0})$ quelles que soient P et Q dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Si $r \geq 1$, f est non nul, et d'après les questions **Q9** (pour $r = n$) et **Q11** (pour $r < n$) et la remarque ci-dessus, il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = J_{n, r}$.

Or, d'après la question **Q2**, il existe deux matrices P et Q appartenant à $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}_c}(f)Q^{-1}$, où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Comme $M = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, on obtient $P^{-1}M Q^{-1} = J_{n, r}$, soit :

$$M = P J_{n, r} Q = \Phi_{P, Q}(J_{n, r}).$$

Finalement, quel que soit r :

$$\boxed{\text{Il existe deux matrices } P \text{ et } Q \text{ de } GL_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = \Phi_{P, Q}(J_{n, r}).}$$

III.D –

Q13. Notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à A et B respectivement, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a alors $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$ et $B = M_{\mathcal{B}_c}(g)$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$, alors d'après la question **Q2**, on a :

$$\begin{cases} M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}'}(id) M_{\mathcal{B}_c}(f) M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(id) = M_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}'}(id) A M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(id) \\ M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = M_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}'}(id) M_{\mathcal{B}_c}(g) M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(id) = M_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}'}(id) B M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(id) \end{cases}$$

Et en posant $P_2 = (M_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}'}(id))^{-1} = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}_c}(id)$ et $Q_2 = (M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(id))^{-1} = M_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}(id)$, on obtient :

$$A = P_2 M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) Q_2 \quad \text{et} \quad B = P_2 M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) Q_2.$$

On cherche ici deux bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, telles que $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, soit :

$$\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 \\ f(e_2) = 0 \\ g(e_1) = \alpha \varepsilon_2 \\ g(e_2) = \beta \varepsilon_2 \end{cases}$$

Comme $rg(f) = 1$, on a $\dim \ker f = 2 - rg(f) = 1$ (d'après le théorème du rang).

Considérons $e_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1) \neq 0$ et e_2 un vecteur non nul de $\ker f$.

Comme $e_1 \notin \ker f$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a $rg(g) = 1$, donc $\text{Im } g$ est une droite. Soit ε_2 un vecteur directeur de $\text{Im } g$. On a alors :

$$\begin{cases} g(e_1) = \alpha \varepsilon_2 \\ g(e_2) = \beta \varepsilon_2 \end{cases}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Comme pour f , on a $\dim \ker g = 1$, donc si $g(e_1) = g(e_2) = 0$, alors $e_1, e_2 \in \ker g$, donc e_1 et e_2 sont colinéaires, ce qui est faux. Ainsi, soit $g(e_1) \neq 0$, soit $g(e_2) \neq 0$, soit $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Posons enfin $\varepsilon_1 = f(e_1)$.

Par hypothèse, $\text{Im } A = \text{Im } f$ et $\text{Im } B = \text{Im } g$ sont distincts. Or, ces deux sous-espaces sont des droites, donc $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$.

Si ε_1 et ε_2 sont colinéaires, alors $\varepsilon_1 \in \text{Vect}(\varepsilon_2) = \text{Im } g$. Mais $\varepsilon_1 = f(e_1) \in \text{Im } f$.

Ainsi, $\varepsilon_1 \in \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$, soit $\varepsilon_1 = 0$. Ceci est absurde car on a choisi e_1 de telle façon que $\varepsilon_1 = f(e_1) \neq 0$. Ainsi, ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires, et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a bien $\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 \\ f(e_2) = 0 \\ g(e_1) = \alpha \varepsilon_2 \\ g(e_2) = \beta \varepsilon_2 \end{cases}$, donc $\begin{cases} M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \end{cases}$ et comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, en posant

$P_2 = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id)$ et $Q_2 = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id)$, on peut alors conclure que :

Il existe $P_2, Q_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$ et $B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$.

IV – Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

IV.A –

Q14. On a $\tau(B_1) = B_1$, $\tau(B_2) = B_3$, $\tau(B_3) = B_2$ et $\tau(B_4) = B_4$, donc :

$$M_{\mathcal{B}_{ca}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q15. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \tau(B_2 + B_3) &= \tau(B_2) + \tau(B_3) = B_3 + B_2 = B_2 + B_3 \\ \tau(B_2 - B_3) &= \tau(B_2) - \tau(B_3) = B_3 - B_2 = -(B_2 - B_3) \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(B_1, B_2 + B_3, B_2 - B_3, B_4) &= \text{Vect}(B_1, 2B_2, B_2 - B_3, B_4) \\ &= \text{Vect}(B_1, B_2, B_3 - B_2, B_4) \\ &= \text{Vect}(B_1, B_2, B_3, B_4) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{B} = (B_1, B_2 + B_3, B_2 - B_3, B_4)$ est une famille génératrice de 4 vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4 : c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'après le début de la question, dans cette base on a :

$$M_{\mathcal{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $T = M_{\mathcal{B}_{ca}}(\tau) = PM_{\mathcal{B}}(\tau)P^{-1}$ avec $P = P_{\mathcal{B}_{ca}}^{\mathcal{B}}$, on a bien :

$$T = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = P_{\mathcal{B}_{ca}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q16. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_{P,Q}(B_1) &= PB_1Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{pmatrix} \\ \Phi_{P,Q}(B_2) &= PB_2Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag & ah \\ cg & ch \end{pmatrix} \\ \Phi_{P,Q}(B_3) &= PB_3Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be & bf \\ de & df \end{pmatrix} \\ \Phi_{P,Q}(B_4) &= PB_4Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire :

$$M_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi_{P,Q}) = \begin{pmatrix} ae & ag & be & bg \\ af & ah & bf & bh \\ ce & cg & de & dg \\ cf & ch & df & dh \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$M_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi_{P,Q}) = \begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix} rg(M) \text{ avec } U = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = Q^T.$$

IV.B –

Q17. On a $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $rg(\Phi(M)) = rg(M)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(M) = 0_n$. On a alors $rg(M) = rg(\Phi(M)) = 0$, donc $M = 0_n$.

Ainsi, $\ker \Phi = \{0_n\}$.

Ceci veut dire que Φ est injectif et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie (égale à 4), Φ est bijectif, soit :

Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q18. On a $rg(B_1) = rg(B_4) = 1$ et $B_1 + B_4 = I_2$, donc $rg(B_1 + B_4) = 2$. Comme Φ conserve le rang :

$$rg(\Phi(B_1)) = rg(\Phi(B_4)) = 1 \text{ et } rg(\Phi(B_1 + B_4)) = 2.$$

On a $rg(\Phi(B_1)) = rg(\Phi(B_4)) = 1$ (donc $\text{Im } \Phi(B_1)$ et $\text{Im } \Phi(B_4)$ sont des droites de $\mathbb{R}^2$).

Si $\text{Im } \Phi(B_1) = \text{Im } \Phi(B_4) = \text{Vect}(X_0)$ avec $X_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors pour toute $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a $\Phi(B_1)X = \lambda_1 X_0$ et $\Phi(B_4)X = \lambda_4 X_0$ avec $\lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ et :

$$\Phi(B_1 + B_4)X = \Phi(B_1)X + \Phi(B_4)X = \lambda_1 X_0 + \lambda_4 X_0 = (\lambda_1 + \lambda_4)X_0.$$

Ainsi, $\text{Im } \Phi(B_1 + B_4) \subset \text{Vect}(X_0)$, donc $rg(\Phi(B_1 + B_4)) \leq 1$, ce qui contredit ce que l'on vient de trouver. Ainsi, $\text{Im } \Phi(B_1) \neq \text{Im } \Phi(B_4)$.

Les matrices $\Phi(B_1)$ et $\Phi(B_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifient donc les hypothèses de la question **Q13**, donc il existe $P_2, Q_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $\Phi(B_1) = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$ et $\Phi(B_4) = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$ où α et β sont des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Ceci donne :

$$\Phi_{P_2^{-1}, Q_2^{-1}}(\Phi(B_1)) = P_2^{-1} \Phi(B_1) Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_{P_2^{-1}, Q_2^{-1}}(\Phi(B_4)) = P_2^{-1} \Phi(B_4) Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

En posant $P_1 = P_2^{-1}$ et $Q_1 = Q_2^{-1}$:

Il existe $P_1, Q_1 \in GL_2(\mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ telles que :

$$\Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Q19. On a pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $C_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \\ d_j \end{pmatrix}$ et $B'_j = \Phi'(B_j) = a_j B_1 + b_j B_2 + c_j B_3 + d_j B_4 = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$.

Or, d'après la question précédente, $\Phi'(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Phi'(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, donc :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Q20. Par hypothèse, Φ conserve le rang, et d'après la question **Q4**, que Φ_{P_1, Q_1} conserve le rang aussi, donc pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $rg(\Phi'(M)) = rg(\Phi_{P_1, Q_1}(\Phi(M))) = rg(\Phi(M)) = rg(M)$ et ainsi, $\Phi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi$ conserve le rang.

Alors, pour toute matrice non inversible M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $rg(\Phi'(M)) = rg(M) < 2$, donc $\Phi'(M)$ n'est pas inversible et donc, $\det(\Phi'(M)) = 0$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $rg(B_i) = 1$, donc n'est pas inversible et ainsi :

$$\det(\Phi'(B_i)) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix} = 0.$$

Soit, pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$a_i d_i - b_i c_i = 0$$

Q21. On a $B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $B_1 + B_2$ n'est pas inversible, et d'après ce que l'on vient de voir :

$$\det(B'_1 + B'_2) = \det(\Phi'(B_1 + B_2)) = \det(\Phi'(B_1) + \Phi'(B_2)) = 0.$$

Or, $\Phi'(B_1) + \Phi'(B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, donc, avec $a_2 d_2 - b_2 c_2 = 0$:

$$\det(\Phi'(B_1) + \Phi'(B_2)) = (1+a_2)d_2 - b_2 c_2 = d_2 + a_2 d_2 - b_2 c_2 = d_2 = 0.$$

De même, $B_1 + B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $B_1 + B_3$ n'est pas inversible, et :

$$\det(\Phi'(B_1) + \Phi'(B_3)) = d_3 + a_3 d_3 - b_3 c_3 = d_3 = 0.$$

Ainsi :

$$d_2 = d_3 = 0$$

IV.C –

Q22. On a avec $C_1 = (a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1)^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ (**Q19**), $d_2 = d_3 = 0$ (**Q21**) et $c_2 = 0$:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = b_2 c_3 d_4.$$

Or, d'après les questions **Q3** et **Q17**, Φ_{P, Q_1} et Φ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\Phi' = \Phi_{P, Q_1} \circ \Phi$ est aussi un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ainsi, $\det \Phi' = \det M' = b_2 c_3 d_4 \neq 0$, ce qui permet de conclure que :

Les nombres b_2, c_3, d_4 sont tous les trois non nuls.

Q23. On a vu que $M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$.

De plus, $b_3 c_3 = 0$ et $c_3 \neq 0$, donc $b_3 = 0$. On veut donc montrer que $a_3 = 0$.

On a alors $B'_3 = \Phi'(B_3) = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B'_4 = \Phi'(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}$, donc :

$$B'_3 + B'_4 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

De plus, comme dans la question **Q21**, on a $rg(B'_3 + B'_4) = rg(B_3 + B_4) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, donc :

$$\det(B'_3 + B'_4) = a_3 d_4 = 0$$

Comme $d_4 \neq 0$, on obtient bien $a_3 = 0$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$.

Reste à montrer que $c_4 = a_2 c_3$ et $d_4 = b_2 c_3$.

Toujours avec le même raisonnement que plus haut :

- $B_2 + B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$, donc $B'_2 + B'_4 \notin GL_2(\mathbb{R})$ et :

$$\det(B'_2 + B'_4) = \det(\Phi'(B_2) + \Phi'(B_4)) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_2 d_4 - b_2 c_4 = 0 ;$$

- $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$, donc $B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4 \notin GL_2(\mathbb{R})$ et :

$$\det(B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4) = \begin{vmatrix} 1+a_2 & b_2 \\ c_3+c_4 & d_4 \end{vmatrix} = (1+a_2)d_4 - b_2(c_3+c_4) = 0.$$

Ainsi, $a_2 d_4 = b_2 c_4$ et $d_4 + a_2 d_4 - b_2 c_3 - b_2 c_4 = d_4 - b_2 c_3 = 0$, donc :

$$d_4 = b_2 c_3.$$

Enfin, comme $b_2 \neq 0$, on peut écrire $c_4 = \frac{a_2 d_4}{b_2} = \frac{a_2 b_2 c_3}{b_2}$, ce qui donne :

$$c_4 = a_2 c_3.$$

Finalement, quand $c_2 = 0$, on a bien :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \text{ avec } c_4 = a_2 c_3 \text{ et } d_4 = b_2 c_3.$$

Q24. On vient de voir que :

$$M' = M_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi') = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_2 c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0_2 \\ 0_2 & c_3 U \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } U = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

D'après la question **Q16**, on a alors :

$$M' = M_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi') = M_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi_{P,Q})$$

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = U^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\Phi' = \Phi_{P,Q} \in \mathcal{L}_1$.

Or, $\Phi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi$ et d'après **Q3**, Φ_{P_1, Q_1} est bijective de réciproque $\Phi_{P_1, Q_1}^{-1} = \Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}}$, donc :

$$\Phi = \Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}} \circ \Phi' = \Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}} \circ \Phi'.$$

Comme $\Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}} \in \mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_1$ est stable par composition (vu dans la question **Q6**), on obtient :

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}_1}$$

IV.D –

Q25. Comme dans la question **Q23**, on a $M_{B_{ca}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$ et $M_{B_{ca}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'après la

question **Q14**. Alors :

$$M_{B_{ca}}(\Phi' \circ \tau) = M_{B_{ca}}(\Phi') M_{B_{ca}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Or, $b_2 c_2 = 0$ (conclusion des questions **Q20** et **Q21**) et ici $c_2 \neq 0$, donc $b_2 = 0$ et ainsi :

$$\boxed{M_{B_{ca}}(\Phi' \circ \tau) = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}}$$

Q26. Les applications Φ' et τ sont des automorphismes, donc $\Phi' \circ \tau$ aussi et $M_{B_{ca}}(\Phi' \circ \tau)$ est donc inversible. Or, si $b_3 = 0$, $M_{B_{ca}}(\Phi' \circ \tau)$ contient une ligne de 0, donc n'est pas inversible. Ainsi, $b_3 \neq 0$ et comme $b_3 c_3 = 0$ (conclusion des questions **Q20** et **Q21**), on a :

$$\boxed{c_3 = 0}$$

Q27. Comme Φ et τ conservent le rang, $\Psi = \Phi \circ \tau$ conserve le rang.

De plus, B_1 et B_4 sont symétriques, donc $\tau(B_1) = B_1$ et $\tau(B_4) = B_4$, d'où :

$$\Psi(B_1) = \Phi \circ \tau(B_1) = \Phi(B_1) \quad \text{et} \quad \Psi(B_4) = \Phi \circ \tau(B_4) = \Phi(B_4).$$

On peut donc introduire les mêmes matrices P_1 et Q_1 que dans la question **Q18**, ainsi que l'endomorphisme $\Psi' = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Psi = \Phi_{P_1, Q_1} \circ \Phi \circ \tau = \Phi' \circ \tau$.

Or, le troisième coefficient de la deuxième colonne de $M_{B_{ca}}(\Psi')$ est nul, ce qui valide l'hypothèse de la partie **IV.C** pour $M_{B_{ca}}(\Psi')$. On peut donc lui appliquer la conclusion de cette partie, autrement dit : $\Psi' \in \mathcal{L}_1$. Or, $\tau \circ \tau = id$, donc :

$$\Phi = \Phi \circ (\tau \circ \tau) = (\Phi \circ \tau) \circ \tau = \Psi' \circ \tau.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}_2}$$

V – Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le déterminant

Q28. On a $A \neq 0_2$ telle que $\Phi(A) = 0_2$. Comme Φ conserve le déterminant :

$$\det A = \det(\Phi(A)) = 0.$$

Donc, $A \notin GL_2(\mathbb{R})$ et ainsi, $rg(A) \leq 1$. Mais comme $A \neq 0_2$, on a aussi $rg(A) \geq 1$ et ainsi :

$$rg(A) = 1$$

Q29. On a $N = P(I_2 - J_{2,1})Q = PQ - PJ_{2,1}Q = PQ - A$, donc :

$$\det(A + N) = \det(PQ) = \det P \times \det Q.$$

Comme P et Q sont inversibles, $\det P \neq 0$ et $\det Q \neq 0$, donc :

$$\det(A + N) \neq 0.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \det(A + N) &= \det(\Phi(A + N)) = \det(\Phi(A) + \Phi(N)) = \det(\Phi(N)) = \det N \\ &= \det(P(I_2 - J_{2,1})Q) = \det P \times \det(I_2 - J_{2,1}) \times \det Q \\ &= \det P \times \det Q \times \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det P \times \det Q \times \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\det(A + N) \neq 0$ et $\det(A + N) = 0$, ce qui est absurde, donc il n'existe pas de matrice A non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(A) = 0_2$. Ceci se reformule en $\ker \Phi = \{0_2\}$, donc Φ est injectif et comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, Φ est bijectif, d'où :

$$\Phi \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Q30. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Si $rg(A) = 0$, alors $A = 0_2$ et $rg(\Phi(A)) = rg(\Phi(0_2)) = rg(0_2) = 0 = rg(A)$.
- Si $rg(A) = 1$, on a $\det(\Phi(A)) = \det A = 0$, donc $rg(\Phi(A)) \leq 1$. Mais comme $A \neq 0_2$, on a $\Phi(A) \neq 0_2$ (Φ est injectif), donc $rg(\Phi(A)) \geq 1$ et ainsi : $rg(\Phi(A)) = 1 = rg(A)$.
- Si $rg(A) = 2$, alors $A \in GL_2(\mathbb{R})$, donc $\det(\Phi(A)) = \det A \neq 0$ et $\Phi(A) \in GL_2(\mathbb{R})$, d'où :

$$rg(\Phi(A)) = 2 = rg(A).$$

Finalement, dans tous les cas, $rg(\Phi(A)) = rg(A)$ et donc :

$$\Phi \text{ conserve le rang.}$$

Q31. On admet que tout endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang. Or, on a admis à la fin de la partie IV qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Ainsi, si $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, conserve le déterminant alors $\Phi \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Réciproquement, soit $\Phi \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\Phi = \Phi_{P,Q}$ ou $\Psi_{P,Q}$.

Or, d'après la question **Q5**, $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant si et seulement si $(\det P) \times (\det Q) = 1$.

Ainsi :

Les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant sont les $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ tels que $(\det P) \times (\det Q) = 1$.

Problème 2

Q32. a. On a $a_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$, donc $|a_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$.

Comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et $\sum b_n$ converge, la série $\sum |a_n|$ converge et ainsi :

$\sum a_n$ converge absolument.

De plus, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$|a_n| \leq \varepsilon b_n.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

Or, par inégalité triangulaire, on a $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|$, donc pour tout entier $n \geq N$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

Ceci prouve que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right)$$

b. On suppose que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$.

Comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang et $|a_n| = a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$.

Alors, comme $\sum b_n$ converge, la série $\sum |a_n|$ converge et ainsi :

$$\boxed{\sum a_n \text{ converge absolument.}}$$

La relation $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ se réécrit $a_n - b_n = o_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$.

On peut donc utiliser le résultat de la question précédente qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - b_k) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right).$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k}$$

Q33. Comme $p \geq 2$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^p}$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^p}$ est définie, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{t^p} \leq \frac{1}{k^p}$ pour tout $t \in [k, k+1]$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)^p} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^p} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^p} dt = \frac{1}{k^p}.$$

Comme $\sum \frac{1}{k^p}$ converge et $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt$ converge. On peut donc sommer la double inégalité précédente de $k = n \in \mathbb{N}^*$ à l'infini, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^p} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^p}.$$

On a $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^p} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{n^p} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ et :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} dt = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \left[-\frac{1}{(p-1)t^{p-1}} \right]_n^{+\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \leq \frac{1}{n^p} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \Leftrightarrow \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} - \frac{1}{n^p} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Or, $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}} - \frac{1}{n^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$, donc le théorème de gendarmes appliqué aux équivalents permet de conclure que :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}}$$

Q34. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^p} + \frac{1}{p-1} \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \\ &= \frac{1}{(n+1)^p} - \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{n^p} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-(p-1)} \right) \\ &= \frac{1}{n^p} \left[1 - \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \left(\frac{p-1}{n} - \frac{(p-1)p}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= -\frac{p}{2} \frac{1}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{p}{2} \frac{1}{n^{p+1}}$.

Comme $p \geq 2$, la série $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$ converge, donc la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge aussi et d'après la question 1 :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{p}{2} \frac{1}{k^{p+1}} \right).$$

Comme $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_n$ et ainsi :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{p}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}.$$

D'après la question précédente, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p(n-1)^p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{pn^p}$ et ainsi :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^p}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{2n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)}$$

Q35. a. Commençons par prouver que la suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On a :

$$\begin{aligned} (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n) + \frac{1}{2n} &= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum [(H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)]$ converge aussi et, ainsi :

La suite $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On note γ sa limite.

b. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \gamma - \ln(n+1) - \frac{1}{2(n+1)} - H_n + \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$ et comme la série strictement positive $\sum \frac{1}{6n^3}$ converge, on peut utiliser la question **Q32.b** pour conclure que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}.$$

Or, d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} \right) = 0$, donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = -u_n.$$

Comme d'après la question **Q33**, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2(n-1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = -u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6} \frac{1}{2n^2}.$$

Soit $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$ et ainsi :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

c. La série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} \frac{-1}{k} + \sum_{k=1, k \text{ impair}}^n \frac{1}{k} \\ &= -2 \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= -2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= H_{2n} - H_n \end{aligned}$$

Or, $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[H_n - \left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} \right) \right] = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n) \left[H_{2n} - \left(\ln(2n) + \gamma + \frac{1}{2(2n)} \right) \right] = 0$ et ainsi :

$$H_{2n} = \ln(2n) + \gamma + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n + \ln 2 + \gamma + \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :

$$A_{2n} = \left(\ln n + \ln 2 + \gamma + \frac{1}{4n} \right) - \left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$A_{2n} = \ln 2 - \frac{(-1)^{2n}}{2(2n)} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n} \right).$$

De plus :

$$A_{2n+1} = A_{2n} + \frac{1}{2n+1} = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2n+1} = \ln 2 - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2n+1} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)$$

Ainsi :

$$A_{2n+1} = \ln 2 - \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right).$$

On a donc :

$$\begin{cases} A_{2n} = \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^{2n}}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n} \right) \\ A_{2n+1} = \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right) \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{A_n = \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)}$$