DM de Mathématiques n° 2

Soit un entier $n \geq 2$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est nilpotente s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^{p-1} \neq 0_n$ et $A^p = 0_n$. Cet entier *p* est alors appelé indice de nilpotence de *A*.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$C_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus AM = MA \right\}.$$

L'ensemble C_A est appelé commutant de *A*.

On rappelle que les puissances de *A* sont définies par $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A^k A = AA^k$.

Alors, si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$\mathbb{K}[A] = \left\{ P(A) \setminus P \in \mathbb{K}[X] \right\}.$$

On prend $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée.

1) Montrer que C_A et $\mathbb{K}[A]$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathbb{K}[A] \subset C_A$.
2) Soit $Q \in GL_n(\mathbb{K})$.
   a. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}[Q^{-1}AQ] = \left\{ Q^{-1}P(A)Q \setminus P \in \mathbb{K}[X] \right\}$.
   b. Prouver que $C_{Q^{-1}AQ} = \left\{ Q^{-1}M\,Q \setminus M \in C_A \right\}$.
3) Prouver alors que $C_A = \mathbb{K}[A]$ si et seulement si pour tout $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $C_{Q^{-1}AQ} = \mathbb{K}[Q^{-1}AQ]$.
4) On suppose que *A* est semblable à une matrice diagonale $D = diag\left(a_1, \dots, a_n\right)$ où les a_i sont deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$L_i = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^{n} (X - a_k)}{\prod_{k=1, k \neq i}^{n} (a_i - a_k)}.$$

   a. Démontrer que C_D est égal à $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   b. Prouver que $\left(L_1, \dots, L_n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   c. Montrer que pour tout $\left(b_1, \dots, b_n\right) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.
   d. En déduire que $C_A = \mathbb{K}[A]$.

5) Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'indice $p \geq 1$.

Justifier qu'il existe un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}Z \neq 0$, puis montrer que la famille $\left(A^{p-1}Z, A^{p-2}Z, \dots, AZ, Z\right)$ est libre. En déduire que $p \leq n$.

6) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice n.

   a. Montrer que A est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   b. Calculer les puissances de N.

   c. Prouver que $C_A = \mathbb{K}[A]$.

7) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si $p < n$?