

DM de Mathématiques n° 3

Exercice 1

On pose $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f sur ce domaine.
- 2) Déterminer un équivalent simple de f en 0^+ , puis en $+\infty$.
- 3) Etudier la fonction f .

Exercice 2

On pose $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ avec $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1 + nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est de classe C^∞ sur ce domaine.

☺ Pour calculer les dérivées successives de f_n , remarquer que $(1 + nx)f_n(x) = e^{-nx}$ et penser à une certaine et mystérieuse formule.

Exercice 3

On pose $f : x \mapsto \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{x + n}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
- 3) Etudier f sur $] -1, 1[$.
- 4) Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.