DS de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Problème 1

– extrait adapté de Centrale-Supélec 2023, PSI, Mathématiques 1 –

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $GL_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det M$ son déterminant et $rg\,(M)$ son rang.

On note τ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa transposée, notée $M^\top$. On rappelle que M et $M^\top$ ont même rang et même déterminant.

Pour des réels $a_1, \dots, a_n$, on note $diag\left(a_1, \dots, a_n\right)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $a_1, \dots, a_n$.

Lorsque $M_1, \dots, M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \dots, n_k$, on note $diag\left(M_1, \dots, M_k\right)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + \dots + n_k$, diagonale par blocs, égale à :

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M (c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$), on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$, et noyau de M, noté $\ker M$, l'image de f et le noyau de f respectivement, soit $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} f$ et $\ker M = \ker f$.

Si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si *f* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, la $j^{ième}$ colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$, on simplifie la notation $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $M_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme *f*.

Enfin, on dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

— conserve le rang si pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $rg\,(\Phi(M))=rg\,(M)$;

— conserve le déterminant si pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\Phi(M)=\det M$.

I – Résultats préliminaires

On suppose que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que *f* et *g* sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Q1. *Question de cours*. Démontrer que :

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g\circ f)=M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

Q2. En déduire qu'il existe deux matrices *P* et *Q* appartenant à $GL_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f)=PM_{\mathcal{E}}(f)Q.$$

II – Étude de deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour deux matrices *P* et *Q* de $GL_n(\mathbb{R})$, on considère les applications :

$$\Phi_{P,Q}:\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ \quad M\ \mapsto\ PMQ\end{cases}\qquad\qquad \Psi_{P,Q}:\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ \quad M\ \mapsto\ PM^{\mathsf{T}}Q\end{cases}$$

Q3. Vérifier que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis montrer que ce sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en précisant leurs applications réciproques.

Q4. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

Q5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur *P* et *Q* pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

On pose :

$$\mathcal{L}_1=\left\{\Phi_{P,Q}\setminus(P,Q)\in GL_n(\mathbb{R})^2\right\}\ \text{ et }\ \mathcal{L}_2=\left\{\Psi_{P,Q}\setminus(P,Q)\in GL_n(\mathbb{R})^2\right\}.$$

Q6. Démontrer que $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que :

$$\forall\,(\Theta,\Theta')\in(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2)^2,\ \Theta\circ\Theta'\in\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2.$$

Q7. Montrer que $\tau\in\mathcal{L}_2$, mais que $\tau\notin\mathcal{L}_1$.

Q8. En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

III – Endomorphismes de rang donné

On suppose que *f* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker f$.

III.A – On suppose dans cette sous-partie que *f* est un isomorphisme.

On se donne une base $\mathcal{B}=\left(e_1,\dots,e_n\right)$ de $\mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{B}'$ la base $\mathcal{B}'=\left(f(e_1),\dots,f(e_n)\right)$.

Q9. Donner $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.B – On suppose dans cette sous-partie que *f* n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker f\neq\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker f$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B}=\left(e_1,\dots,e_k,\mathcal{B}_2\right)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q10. Montrer que la famille $\left(f(e_1),\dots,f(e_k)\right)$ est libre. Justifier que $k<n$.

On complète la famille $\left(f(e_1),\dots,f(e_k)\right)$ en une base $\mathcal{B}'=\left(f(e_1),\dots,f(e_k),f_{k+1},\dots,f_n\right)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q11. Déterminer $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

III.C – Dans toute la suite du problème, pour tout entier naturel $r\in[\![0,n]\!]$, on note la matrice construite par blocs :

$$J_{n,r}=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r}\end{array}\right)$$

en convenant que $J_{n,n}=I_n$ et $J_{n,0}=0_n$.

Soit *M* un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang *r*.

Q12. Montrer qu'il existe deux matrices *P* et *Q* de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $M=\Phi_{P,Q}\left(J_{n,r}\right)$.

III.D – On suppose dans cette sous-partie que $n=2$ et que *A* et *B* sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1. On suppose que $\operatorname{Im}A$ et $\operatorname{Im}B$ sont distincts.

Q13. Montrer qu'il existe deux matrices P_2 et Q_2 de $GL_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A=P_2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Q_2 \quad \text{et} \quad B=P_2\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\beta\end{pmatrix}Q_2$$

où α et β sont des réels, non tous deux nuls.

IV – Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que $n=2$.

On désigne par $\mathcal{B}_{ca}=\left(B_1,B_2,B_3,B_4\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec :

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad B_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad B_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

IV.A –

Q14. Expliciter la matrice de la transposition τ dans la base canonique $\mathcal{B}_{ca}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sera notée T.

Q15. Prouver que $T = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ où P est une matrice de $GL_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

On se donne deux éléments P et Q de $GL_2(\mathbb{R})$:

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Q16. Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{ca}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix}$$

où U est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

On suppose dans toute la suite de cette partie IV *que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *qui conserve le rang.*

IV.B –

Q17. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q18. Déterminer les rangs de $\Phi(B_1)$, $\Phi(B_4)$ et $\Phi(B_1 + B_4)$.

En déduire l'existence de deux matrices P_1 et Q_1 de $GL_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Phi' = \Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi$ et $M' = M_{\mathcal{B}_{ca}}(\Phi')$.

Pour tout $j \in [\![1,4]\!]$, on pose $B'_j = \Phi'(B_j)$ et on note $C_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j & d_j \end{pmatrix}^{\top}$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de M'.

Q19. Déterminer C_1 et C_4.

Q20. Démontrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_i d_i - b_i c_i = 0$.

Q21. En considérant le rang des matrices $B'_1 + B'_2$ et $B'_1 + B'_3$, démontrer que $d_2 = d_3 = 0$.

On déduit des deux questions précédentes que $b_2 c_2 = b_3 c_3 = 0$.

IV.C – On suppose dans cette sous-partie que $c_2 = 0$.

Q22. En étudiant $\det M'$, démontrer que les nombres b_2, c_3, d_4 sont tous les trois non nuls.

Q23. En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices $B'_3+B'_4$, $B'_2+B'_4$ et $B'_1+B'_2+B'_3+B'_4$, démontrer que :

$$M'=\begin{pmatrix}1 & a_2 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_3 & c_4\\ 0 & 0 & 0 & d_4\end{pmatrix}$$

avec $c_4=a_2c_3$ et $d_4=b_2c_3$.

Q24. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_1$.

IV.D – On suppose à présent que $c_2\neq 0$.

Q25. Prouver que la matrice dans la base $\mathcal{B}_{ca}$ de $\Phi'\circ\tau$, endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est égale à :

$$\begin{pmatrix}1 & a_3 & a_2 & 0\\ 0 & b_3 & 0 & 0\\ 0 & c_3 & c_2 & c_4\\ 0 & 0 & 0 & d_4\end{pmatrix}.$$

Q26. Démontrer que $c_3=0$.

Q27. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n=2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$.

On admet que ce résultat est encore valable lorsque n est un entier strictement supérieur à 2.

V – Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le déterminant

On suppose dans cette sous-partie que $n=2$ et que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le déterminant. On considère une matrice A non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(A)=0_2$.

Q28. Montrer que A est de rang 1.

La partie III assure l'existence de deux éléments P et Q de $GL_2(\mathbb{R})$ tels que $A=PJ_{2,1}Q$.
On pose alors $N=P(I_2-J_{2,1})Q$.

Q29. En calculant de deux manières différentes $\det(A+N)$, aboutir à une absurdité et conclure que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q30. En discutant selon les valeurs possibles du rang, démontrer que Φ conserve le rang.

On a ainsi démontré que tout endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang. On admet que ce résultat s'étend au cas où n est un entier naturel non nul quelconque.

Q31. Caractériser alors les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant.

Problème 2

Q32. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et la série $\sum b_n$ converge.

a. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors la série $\sum a_n$ converge absolument et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right).$$

b. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors la série $\sum a_n$ converge absolument et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k .$$

Q33. Soit un entier $p \geq 2$. Après avoir justifié que la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, prouver, *en utilisant la comparaison série-intégrale*, que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} .$$

Q34. Déterminer le développement asymptotique à deux termes (sans compter le terme négligeable) de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$.

☺ *On pourra poser* $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}$ *et s'intéresser à la série* $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Q35. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a. Prouver que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.

b. Montrer que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

c. Prouver qu'il existe un réel a, que l'on donnera, tel que :

$$A_n = \ln 2 + a\frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

- FIN DU SUJET -