Corrigé du DM n° 3

Exercice 1

1) Posons $f_n(x)=\dfrac{1}{n+n^2x}=\dfrac{1}{n(1+nx)}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$. On a $f_n(0)=\dfrac{1}{n}$, donc $\sum f_n(0)$ diverge et pour tout $x\in\mathbb{R}^*\setminus\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2x}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^2x}$ est à termes de signe constant et converge, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } D=\mathbb{R}^*\setminus\left\{-\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}.}$$

Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante sur tout intervalle inclus dans D.

Soient deux réels a et b tels que $a<b$ et $[a,b]\subset D$.

Comme $0\notin D$, $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ ou $[a,b]\subset\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+n^2b}\le f_n(x)\le\frac{1}{n+n^2a}.$$

Alors :

$$|f_n(x)|\le\max\left(\left|\frac{1}{n+n^2a}\right|,\left|\frac{1}{n+n^2b}\right|\right)\le\max\left(\frac{1}{n^2|a|},\frac{1}{n^2|b|}\right)=\frac{\mu}{n^2}$$

avec $\mu=\max\left(\dfrac{1}{|a|},\dfrac{1}{|b|}\right)$.

La série $\sum\dfrac{\mu}{n^2}$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans D, et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur D, donc, f est continue sur tout segment inclus dans D, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } D.}$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $g_x:t\mapsto\dfrac{1}{t+t^2x}$. La fonction g_x est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$. On peut donc utiliser la comparaison série intégrale qui donne pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$g_x(n)+\int_1^n g_x(t)\,dt\le\sum_{k=1}^n g_x(k)\le g_x(1)+\int_1^n g_x(t)\,dt.$$

Avec $g_x(n)=\dfrac{1}{n+n^2x}=f_n(x)$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n(x)+\int_1^n g_x(t)\,dt=\frac{1}{n+n^2x}+\int_1^n g_x(t)\,dt\le\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\le f_1(x)+\int_1^n g_x(t)\,dt=\frac{1}{1+x}+\int_1^n g_x(t)\,dt \quad (*)$$

Et :

$$\int_1^n g_x(t)\,dt=\int_1^n\frac{dt}{t+t^2x}=\int_1^n\left[\frac{1}{t}-\frac{x}{1+xt}\right]dt=\left[\ln t-\ln(1+xt)\right]_1^n$$
$$=\ln\left(\frac{n}{1+xn}\right)-\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)=\ln(1+x)-\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n g_x(t)\,dt=\ln(1+x)-\ln x$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+n^2x}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=f(x)$, on obtient en passant à la limite que n tend vers l'infini dans **(*)** :

$$\ln(1+x)-\ln x\le f(x)\le\frac{1}{1+x}+\ln(1+x)-\ln x.$$

Or, $\ln(1+x)-\ln x\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{1+x}+\ln(1+x)-\ln x\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x$, donc le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents permet de conclure que :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x}$$

Quand $x\to+\infty$, on a $f_n(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2x}$, on peut alors conjecturer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{1}{n^2x}=\dfrac{\pi^2}{6x}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $g_n:x\mapsto xf_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n(x)=\dfrac{x}{n+n^2x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{1}{n^2}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|g_n(x)|=\dfrac{x}{n+n^2x}\le\dfrac{x}{n^2x}=\dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, donc avec $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc conclure que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}g_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Or, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}g_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}xf_n(x)=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=xf(x)$, donc $xf(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{\pi^2}{6}$ et ainsi :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6x}}$$

3) Remarquons que l'on peut écrire $D = \left]-\infty,-1\right[\cup \left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right[\right) \cup \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante sur tout intervalle inclus dans D, donc la fonction $f=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est elle aussi décroissante sur tout intervalle inclus dans D, en particulier sur $\left]-\infty,-1\right[$, sur $\left]-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right[$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Déterminons les limites.

- Avec les équivalents trouvés dans la question précédente, on obtient :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- Pour tout entier $n\geq 2$, f_n est définie décroît sur $\left]-\infty,-1\right]$ et $\lim_{-\infty} f_n = 0$, donc :

$$\sup_{x\in\left]-\infty,-1\right[} \left|f_n(x)\right| = \left|f_n(-1)\right| = \frac{1}{n^2-n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\left]-\infty,-1\right[$.

Alors, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to-\infty} f_n(x)$, soit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

- Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n>N+1$ et tout $x\in\left]-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right[$, on a :

$$\frac{N+1}{n(N+1-n)} \leq f_n(x) \leq \frac{N}{n(N-n)}.$$

Et comme $\frac{N+1}{n(N+1-n)} \sim -\frac{N+1}{n^2}$ et $\frac{N}{n(N-n)} \sim -\frac{N}{n^2}$, les séries $\sum \frac{N+1}{n(N+1-n)}$ et $\sum \frac{N}{n(N-n)}$ convergent et on peut écrire :

$$\sum_{n=N+2}^{+\infty} \frac{N+1}{n(N+1-n)} \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty} \frac{N}{n(N-n)}.$$

Donc, $\sum_{n=N+2}^{+\infty} f_n$ est bornée sur $\left]-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right[$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n<N$, f_n est continue sur $\left[-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right]$, donc, pour $N\geq 2$, $\sum_{n=1}^{N-1} f_n$ l'est aussi et ainsi, $\sum_{n=1}^{N-1} f_n$ est bornée sur $\left]-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right[$.

Ainsi, $\sum_{n=1}^{N-1} f_n + \sum_{n=N+2}^{+\infty} f_n = f - f_N - f_{N+1}$ est bornée sur $\left]-\frac{1}{N},-\frac{1}{N+1}\right[$.

Or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{N}\right)^+} \left[f_N(x) + f_{N+1}(x)\right] = \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{N}\right)^+} \left[\dfrac{1}{N+N^2x} + \dfrac{1}{N+1+(N+1)^2x}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{N+1}\right)^-} \left[f_N(x) + f_{N+1}(x)\right] = \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{N+1}\right)^-} \left[\dfrac{1}{N+N^2x} + \dfrac{1}{N+1+(N+1)^2x}\right] = -\infty \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{N}\right)^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to \left(-\frac{1}{N+1}\right)^-} f(x) = -\infty .$$

- On prouve de la même façon que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n = f - f_1$ est bornée sur $]-2,-1[$ et donc que :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f_1(x) = -\infty .$$

On peut finalement construire les tableaux de variation :

x	$-\infty$		-1
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

x	$-\frac{1}{N}$		$-\frac{1}{N+1}$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

x	0		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 0$, alors $f_n(x) = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-nx})$ et la série géométrique $\sum e^{-nx}$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge.
- Si $x = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 1$ et si $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Posons $g_n : x \mapsto e^{-nx}$ et $h_n : x \mapsto 1 + nx$. Ces deux fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $g_n^{(k)} : x \mapsto (-n)^k e^{-nx}$, $h_n' : x \mapsto n$ et $h_n^{(k)} = 0$ quand $k \geq 2$.

On a $h_n f_n = g_n$ et avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $k \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} h_n^{(i)}(x) f_n^{(k-i)}(x) = g_n^{(k)}(x) \quad \Leftrightarrow \quad (1+nx) f_n^{(k)}(x) + kn f_n^{(k-1)}(x) = (-n)^k e^{-nx}.$$

Ceci implique que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| = \left| \frac{(-n)^k}{1+nx} e^{-nx} - k \frac{n}{1+nx} f_n^{(k-1)}(x) \right| \leq n^k e^{-nx} + k \left| f_n^{(k-1)}(x) \right|.$$

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a, +\infty[} |\varphi|$.

Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x)| = f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+nx} \leq e^{-na}$. Donc, $\|f_n\|_\infty$ existe et $\|f_n\|_\infty = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-na/2})$.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\| f_n^{(k-1)} \right\|_\infty$ existe et $\left\| f_n^{(k-1)} \right\|_\infty = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-na/2})$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq n^k e^{-nx} + k \left| f_n^{(k-1)}(x) \right| \leq n^k e^{-na} + k \left\| f_n^{(k-1)} \right\|_\infty.$$

Donc $\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty$ existe et :

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty \leq n^k e^{-na} + k \left\| f_n^{(k-1)} \right\|_\infty.$$

Or, $n^k e^{-na} = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-na/2})$, donc avec $\left\| f_n^{(k-1)} \right\|_\infty = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-na/2})$, on obtient pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-na/2}).$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty \text{ existe et } \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty = \underset{n \to +\infty}{o}(e^{-na/2}).$$

Or, la série la série géométrique $\sum e^{-na/2}$ converge, donc $\sum \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty$ converge et ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Ceci prouve que f est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Exercice 3

1) Posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, $\left(\left|f_n(x)\right|\right)_{n \geq 2}$ décroit à partir d'un certain rang et converge vers 0, donc la série $\sum (-1)^n \left|f_n(x)\right|$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } D = \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}.}$$

2) Remarquons déjà que $]-1,1[\subset D$.

- $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
- Pour tout entier $n \geq 2$, f_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ (c'est une fonction rationnelle) avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1,1[$:
$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}.$$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout entier $n \geq 2$ (donc $n-1 > 0$) et tout $x \in]-1,1[$:
$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}.$$
Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{k+1}}$ converge (car $k+1 \geq 2$), donc la série $\sum \dfrac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ converge et ainsi, $\sum f_n^{(k)}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $]-1,1[$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur $]-1,1[$.

Toutes les hypothèses sont bien réunies pour conclure que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$$

3) D'après la question précédente, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, la suite $\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante et de limite nulle. Donc la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ vérifie le critère spécial des séries alternées et ainsi, $f'(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ est du signe strict de son premier terme, qui est $\frac{(-1)^3}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Ainsi, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]-1,1[$ et f est strictement décroissante sur $]-1,1[$.

De plus, comme $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées (dès son premier terme quand $x \in]-1,1[$), on a pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in]-1,1[$:

$$\left|\sum_{k\geq n+1} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n}.$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $]-1,1[$, donc :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{x+n}\right) = \sum_{n\geq 2}\lim_{x\to -1^+}\frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n-1} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{x+n}\right) = \sum_{n\geq 2}\lim_{x\to 1^-}\frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} - 1 + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

On obtient ainsi le tableau :

x	-1		1
f	$\ln 2$	$\searrow$	$\ln 2 - 0,5$

4) Soit $x \in]-1,1[$ fixé. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x}{n}\right)^k + \frac{1}{n}\frac{\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x}{n}\right)^k + \frac{1}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}.$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n\geq 2}(-1)^n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x}{n}\right)^k + \frac{1}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}\right]$$

$$= \sum_{n\geq 2}\left[\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}}x^k + \frac{(-1)^n}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}\right]$$

La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et pour tout $k \geq 1$, la série $\sum \left| \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} x^k \right| = \sum \frac{|x|^k}{n^{k+1}}$ converge aussi, donc $\sum \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} x^k$ converge absolument donc converge. Ceci implique que $\sum \frac{1}{x+n} \left(-\frac{x}{n} \right)^{N+1}$ converge, avec :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+N+1}}{x+n} \frac{x^{N+1}}{n^{N+1}}.$$

De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, tout $N \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq 2$:

$$\left| \frac{(-1)^{n+N+1}}{x+n} \frac{x^{N+1}}{n^{N+1}} \right| = \frac{1}{x+n} \frac{|x|^{N+1}}{n^{N+1}} \leq \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} |x|^{N+1}.$$

Et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$, donc, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k \right| = \left| \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+N+1}}{x+n} \frac{x^{N+1}}{n^{N+1}} \right| \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} |x|^{N+1} = |x|^{N+1}.$$

Enfin, comme $\lim_{N \to +\infty} |x|^{N+1} = 0$ (car $|x| < 1$), le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{N \to +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k \right| = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec $a_k = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[.}$$