

Corrigé du DS n° 2
Mines-Ponts - 2006 - MP – Maths 2
I. Quelques propriétés des racines de P_n'

Q1. La fonction $\cot$ est définie et dérivable sur $]0, \pi[$ comme quotient de telles fonctions et pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\cot' x = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$.

Ainsi, sur $]0, \pi[$, $\cot$ continue (car dérivable) et strictement décroissante de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$ à $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x = -\infty$. Avec le théorème de la bijection continue, on peut alors conclure que :

La fonction $\cot$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_n = X(X-1)\dots(X-n)$, donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_n(k) = 0$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

- la fonction polynomiale $x \mapsto P_n(x)$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$;
- $P_n(k) = P_n(k+1) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $x_{n,k} \in]k, k+1[$ tel que $P_n'(x_{n,k}) = 0$.

On a alors $0 < x_{n,0} < 1 < x_{n,1} < \dots < k < x_{n,k} < k+1 < \dots < n-1 < x_{n,n-1} < n$, donc les $x_{n,k}$ sont deux à deux distincts. On a ainsi trouvé n racines réelles distinctes de P_n' .

Or, $\deg P_n = n+1 \geq 2$, donc $\deg P_n' = n \geq 1$ et ainsi, P_n' admet au plus n racines réelles distinctes et donc ne peut pas admettre plus d'une racine comprise strictement entre k et $k+1$.

Finalement :

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, P_n' admet exactement une racine réelles $x_{n,k}$ dans $]k, k+1[$.

Q3. On a $P_n' = \sum_{k=0}^n \prod_{i=0, i \neq k}^n (X-i)$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\prod_{i=0, i \neq k}^n (X-i) = X^n - \left(\sum_{i=0, i \neq k}^n i \right) X^{n-1} + \dots$

Donc :

$$P_n' = \sum_{k=0}^n \left[X^n - \left(\sum_{i=0, i \neq k}^n i \right) X^{n-1} + \dots \right] = (n+1)X^n - \left(\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0, i \neq k}^n i \right) \right) X^{n-1} + \dots$$

Et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0, i \neq k}^n i \right) &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n i - k \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - k \right) \\ &= (n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=0}^n k = (n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P'_n = (n+1)X^n - \frac{n^2(n+1)}{2} X^{n-1} + \dots$$

Sachant que les racines de P'_n sont les $x_{n,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a alors avec la formule de Viète donnant la somme des racines :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = -\frac{\frac{n^2(n+1)}{2}}{n+1}.$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = -\frac{n^2}{2}}$$

Alors, $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{n,k} - k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} k = -\frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$, soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = -\frac{n}{2}}$$

Q4. On a $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$, donc :

$$P_n(n - X) = \prod_{k=0}^n ((n - X) - k) = \prod_{k=0}^n (-X + n - k) = (-1)^{n+1} \prod_{k=0}^n (X - (n - k)).$$

Et en réindexant ($k' = n - k$ renommé k), on obtient $\prod_{k=0}^n (X - (n - k)) = \prod_{k=0}^n (X - k) = P_n(X)$, ce qui donne :

$$P_n(n - X) = (-1)^{n+1} P_n(X).$$

En dérivant, on obtient $-P'_n(n - X) = (-1)^{n+1} P'_n(X)$, soit $P'_n(n - X) = (-1)^n P'_n(X)$.

On a alors pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P'_n(n - x_{n,k}) = (-1)^n P'_n(x_{n,k}) = 0$ et :

$$k < x_{n,k} < k+1 \Leftrightarrow n-1-k < n-x_{n,k} < n-k.$$

Donc, $n - x_{n,k}$ est l'unique racine de P'_n strictement comprise entre $n-1-k$ et $n-1-k+1$, soit, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\boxed{x_{n,n-1-k} = n - x_{n,k}}$$

Q5. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $x_{n,k} + x_{n,n-1-k} = n$, donc :

$$\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k} = x_{n,k} - k + x_{n,n-1-k} - (n-1-k) = x_{n,k} + x_{n,n-1-k} - k - n + 1 + k.$$

Soit :

$$\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k} = 1$$

L'entier $n \geq 2$ est fixé.

Q6. D'après **Q2** et **Q3**, la fonction $x \mapsto P_n'(x)$ est polynomiale de degré n , de coefficient dominant $n+1 > 0$ polynomiale et admet n racines réelles distinctes $x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n-1}$ (avec $k < x_{n,k} < k+1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$). On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n'(x) = (n+1) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_{n,k}).$$

Alors, P_n' s'annule et change de signe en chaque $x_{n,k}$ avec :

- $P_n' > 0$ sur $]x_{n,n-1}, +\infty[$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n'(x) = +\infty$) ;
- P_n' est du signe de $P_n'(k)$, donc de $(-1)^{n-k}$, sur $]x_{n,k-1}, x_{n,k}[$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$;
- P_n' est du signe de $P_n'(0)$, donc de $(-1)^n$, sur $] -\infty, x_{n,0}[$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On obtient le tableau de variations de P_n suivant la parité de n .

- Si n est pair :

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\dots$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\dots$	$x_{n,n-1}$	n	$+\infty$
$P_n'(x)$		+	0	-	0		0	-	0		-	0	+	
P_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$		$\dots$		$\searrow$		$\nearrow$		$\dots$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

- Si n est impair :

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\dots$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\dots$	$x_{n,n-1}$	n	$+\infty$
$P_n'(x)$		+	0	-	0		0	-	0		-	0	+	
P_n	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$		$\dots$		$\nearrow$		$\searrow$		$\dots$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Q7. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} (-1)^{n-k} P_n(x_{n,k}) &= (-1)^{n-k} \prod_{j=0}^n (x_{n,k} - j) \\ &= (-1)^{n-k} \prod_{j=0}^k (x_{n,k} - j) \prod_{j=k+1}^n (x_{n,k} - j) = \prod_{j=0}^k (x_{n,k} - j) \prod_{j=k+1}^n (j - x_{n,k}) \end{aligned}$$

Or, $k < x_{n,k} < k+1$, donc :

- pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $x_{n,k} - j > 0$;
- pour tout $j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, $j - x_{n,k} > 0$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k}) > 0$$

Q8. On a bien :

$$P_n(X) = [X(X-1)\dots(X-(n-1))](X-n) = (X-n)P_{n-1}(X).$$

Donc :

$$P_n'(X) = P_{n-1}(X) + (X-n)P_{n-1}'(X).$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a avec $P_{n-1}'(x_{n-1,k}) = 0$:

$$P_n'(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k}) + (x_{n-1,k} - n)P_{n-1}'(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k}).$$

Si $n \geq 3$, alors $n-1 \geq 2$, et on a, d'après la question précédente, $(-1)^{n-1-k} P_{n-1}(x_{n-1,k}) > 0$, soit $(-1)^{n-k} P_n'(x_{n-1,k}) = (-1)^{n-k} P_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

Pour $n = 2$, on a $P_2'(x_{1,0}) = P_1(x_{1,0}) = x_{1,0}(x_{1,0} - 1) < 0$ (car $0 < x_{1,0} < 1$).

Ainsi, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$:

$$(-1)^{n-k} P_n'(x_{n-1,k}) < 0$$

Q9. Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. On a $x_{n-1,k}, x_{n,k} \in]k, k+1[$.

D'après la question **Q6**, P_n' est du signe de $(-1)^{n-k}$ sur $]k, x_{n,k}[$ et du signe opposé sur $]x_{n,k}, k+1[$.

Alors, $(-1)^{n-k} P_n' > 0$ sur $]k, x_{n,k}[$ et $(-1)^{n-k} P_n' < 0$ sur $]x_{n,k}, k+1[$.

Or, d'après la question précédente, $(-1)^{n-k} P_n'(x_{n-1,k}) < 0$, donc $x_{n-1,k} \in]x_{n,k}, k+1[$ et ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$:

$$x_{n,k} < x_{n-1,k}$$

Q10. On a bien :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= X[(X-1)(X-2)\dots(X-n)] \\ &= X[(X-1)((X-1)-1)\dots((X-1)-(n-1))] = X P_{n-1}(X-1). \end{aligned}$$

Donc :

$$P_n'(X) = P_{n-1}(X-1) + X P_{n-1}'(X-1).$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $k-1 \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et avec $P_{n-1}'(x_{n-1,k-1}) = 0$:

$$P_n'(1+x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(x_{n-1,k-1}) + (1+x_{n-1,k-1}) P_{n-1}'(x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(x_{n-1,k-1}).$$

D'après la question **Q7**, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $k-1 \in \llbracket 0, (n-1)-1 \rrbracket$, donc :

$$(-1)^{n-k} P_{n-1}(x_{n-1,k-1}) = (-1)^{(n-1)-(k-1)} P_{n-1}(x_{n-1,k-1}) > 0.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$(-1)^{n-k} P_n'(1+x_{n-1,k-1}) > 0$$

Q11. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc $k-1 \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

On a $x_{n-1,k-1} \in]k-1, k[$, donc $1+x_{n-1,k-1} \in]k, k+1[$.

D'après la question **Q9**, $(-1)^{n-k} P_n' > 0$ sur $]k, x_{n,k}[$ et $(-1)^{n-k} P_n' < 0$ sur $]x_{n,k}, k+1[$.

Or, d'après la question précédente, $(-1)^{n-k} P_n'(1+x_{n-1,k-1}) > 0$, donc $1+x_{n-1,k-1} \in]k, x_{n,k}[$, soit pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$1+x_{n-1,k-1} < x_{n,k}$$

Q12. On veut prouver que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\alpha_{n,0} \leq \alpha_{n,1} \leq \alpha_{n,2} \leq \dots \leq \alpha_{n,n-2} \leq \alpha_{n,n-1}$, soit pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\alpha_{n,k} \leq \alpha_{n,k+1}$. Or :

- D'après la question **Q9**, pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $x_{n,k} = \alpha_{n,k} + k < x_{n-1,k} = \alpha_{n-1,k} + k$, soit :

$$\alpha_{n,k} < \alpha_{n-1,k}$$

- D'après la question **Q11**, $1+x_{n-1,k-1} = 1+\alpha_{n-1,k-1} + k-1 = \alpha_{n-1,k-1} + k < x_{n,k} = \alpha_{n,k} + k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, soit :

$$\alpha_{n-1,k-1} < \alpha_{n,k}.$$

Donc, quand $n \geq 3$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, on a $\alpha_{n-1,k-1} < \alpha_{n,k} < \alpha_{n-1,k}$.

Ceci implique que pour tout entier $N = n-1 \geq 2$ et pour tout $K = k-1 \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$:

$$\alpha_{N,K} < \alpha_{N,K+1}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\alpha_{n,k} \text{ croît lorsque } k \text{ croît de } 0 \text{ à } n-1.$$

II. Un développement asymptotique

Remarquons que comme Γ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, Ψ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q13. Pour tout entier $n \geq 2$, $n-1 \in \mathbb{R}_+^*$, donc on a $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ et $\Gamma(n-1) \neq 0$.

Ceci permet d'écrire :

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)} = n-1.$$

Par télescopage, on a alors :

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \prod_{k=2}^n \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-1)} = \prod_{k=2}^n (k-1) = (n-1)!.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\boxed{\Gamma(n) = \Gamma(1)(n-1)!}$$

Q14. D'après la formule de Stirling, on a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de

limite 1 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \varepsilon_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On a alors pour tout entier $n \geq 2$, $\Gamma(n) > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\Gamma(n))}{n} &= \frac{\ln(\Gamma(1)(n-1)!)}{n} = \frac{\ln(\Gamma(1))}{n} + \frac{\ln((n-1)!)}{n} \\ &= \frac{\ln(\Gamma(1))}{n} + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n}\right) = \frac{\ln(\Gamma(1))}{n} + \frac{1}{n} \ln(n!) - \frac{\ln n}{n} \\ &= \frac{\ln(\Gamma(1))}{n} + \frac{1}{n} \ln\left(\varepsilon_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right) - \frac{\ln n}{n} \\ &= \frac{\ln(\Gamma(1))}{n} + \frac{1}{n} \left(\ln \varepsilon_n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n \right) - \frac{\ln n}{n} \\ &= \ln n - 1 - \frac{\ln n}{2n} + \frac{1}{n} \left(\ln(\Gamma(1)) + \ln \varepsilon_n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right) \end{aligned}$$

Or, $\ln \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ln(\Gamma(1)) + \ln \varepsilon_n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) = o(\ln n)$. Avec $\frac{\ln n}{2n} = o(1)$, on obtient :

$$\boxed{\frac{\ln(\Gamma(n))}{n} = \ln n - 1 - \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$$

Q15. La fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En dérivant, on obtient :

$$\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x\Gamma'(x) + \Gamma(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} + \frac{\Gamma(x)}{x\Gamma(x)}.$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}}$$

Q16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\phi(n+1) - \phi(n) &= \Psi(n+1) - \ln(n+1) - \Psi(n) + \ln n \\ &= \Psi(n) + \frac{1}{n} - \Psi(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\phi(n+1) - \phi(n) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\phi(n+1) - \phi(n) \sim \frac{1}{2n^2}$ et la série positive $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge. Donc, par comparaison avec une série à termes positifs :

La série de terme général $\phi(n+1) - \phi(n)$ converge.

Q17. La série de terme général $\phi(n+1) - \phi(n)$ converge, donc grâce au théorème liant suite et série :

La suite $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Q18. On a admis que la fonction Ψ est croissante, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Psi(\lfloor x \rfloor) \leq \Psi(x) \leq \Psi(\lfloor x \rfloor + 1).$$

Comme $\ln \lfloor x \rfloor \leq \ln x \leq \ln(\lfloor x \rfloor + 1)$, on a $-\ln(\lfloor x \rfloor + 1) \leq -\ln x \leq -\ln \lfloor x \rfloor$ et donc :

$$\Psi(\lfloor x \rfloor) - \ln(\lfloor x \rfloor + 1) \leq \Psi(x) - \ln x \leq \Psi(\lfloor x \rfloor + 1) - \ln \lfloor x \rfloor.$$

Soit :

$$\phi(\lfloor x \rfloor) + \ln \lfloor x \rfloor - \ln(\lfloor x \rfloor + 1) \leq \phi(x) \leq \phi(\lfloor x \rfloor + 1) + \ln(\lfloor x \rfloor + 1) - \ln \lfloor x \rfloor.$$

Ou encore :

$$\phi(\lfloor x \rfloor) - \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) \leq \phi(x) \leq \phi(\lfloor x \rfloor + 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right).$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(\lfloor x \rfloor) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(\lfloor x \rfloor + 1) = C$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\phi(\lfloor x \rfloor) - \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\phi(\lfloor x \rfloor + 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) \right] = C.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient alors :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = C}$$

Q19. On suppose $C \neq 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = C$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on a $|\phi(x) - C| \leq \varepsilon$.

Quitte à remplacer A par 1 (si $A < 1$), on peut supposer que $A \geq 1$. Alors, pour tout réel $x \geq A$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_1^x (\phi(t) - C) dt \right| &\leq \frac{1}{x} \int_1^x |\phi(t) - C| dt \leq \frac{1}{x} \left(\int_1^A |\phi(t) - C| dt + \int_A^x |\phi(t) - C| dt \right) \\ &\leq \frac{1}{x} \int_1^A |\phi(t) - C| dt + \frac{1}{x} \int_A^x \varepsilon dt = \frac{B}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon (x - A) \leq \frac{B}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon x = \frac{B}{x} + \varepsilon \end{aligned}$$

avec $B = \int_1^A |\phi(t) - C| dt$.

Comme $\frac{B}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe $A' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x \geq A'$, $\frac{B}{x} \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \geq \max(A, A') \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\left| \frac{1}{x} \int_1^x (\phi(t) - C) dt \right| \leq 2\varepsilon$.

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (\phi(t) - C) dt = 0$. Or :

$$\frac{1}{x} \int_1^x (\phi(t) - C) dt = \frac{1}{x} \int_1^x \phi(t) dt - C + \frac{C}{x}.$$

Comme $\frac{C}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \phi(t) dt = C$ et comme $C \neq 0$, on peut écrire :

$$\boxed{\int_1^x \phi(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Cx}$$

Q20. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x \phi(t) dt = \int_1^x (\Psi(t) - \ln t) dt = \int_1^x \Psi(t) dt - \int_1^x \ln t dt = \int_1^x \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} dt - \int_1^x \ln t dt.$$

Comme Γ est strictement positive et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\int_1^x \phi(t) dt = [\ln(\Gamma(t)) - t \ln t + t]_1^x = \ln(\Gamma(x)) - x \ln x + x - \ln(\Gamma(1)) - 1.$$

Alors :

$$\frac{1}{x} \int_1^x \phi(t) dt = \frac{\ln(\Gamma(x))}{x} - \ln x + 1 - \frac{\ln(\Gamma(1)) + 1}{x}.$$

Avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \phi(t) dt = C$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\Gamma(x))}{x} - \ln x + 1 \right) = C$.

Ceci donne pour des valeurs entières : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\Gamma(n))}{n} - \ln n + 1 \right) = C$

Or, d'après la question **Q14**, $\frac{\ln(\Gamma(n))}{n} - \ln n + 1 \sim -\frac{\ln n}{2n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\Gamma(n))}{n} - \ln n + 1 \right) = 0$

et ainsi, $C = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $C \neq 0$.

Finalement, $C \neq 0$ mène à une contradiction, donc :

$$C = 0$$

Q21. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a avec la question **Q15** :

$$\Psi(x+m+1) - \Psi(x) = \sum_{j=0}^m (\Psi(x+j+1) - \Psi(x+j)) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Psi(x) + \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} - \ln m &= \Psi(x+m+1) - \ln m \\ &= \Psi(x+m+1) - \ln(x+m+1) + \ln(x+m+1) - \ln m \\ &= \Psi(x+m+1) - \ln(x+m+1) + \ln\left(1 + \frac{x+1}{m}\right) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\lim_{m \rightarrow +\infty} (\Psi(x+m+1) - \ln(x+m+1)) = 0$ et comme on a aussi

$\lim_{m \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x+1}{m}\right) = 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} - \ln m \right] = 0$$

Q22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \frac{1}{x+n} < 1$ et :

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n} + \ln\left(1 - \frac{1}{x+n}\right) = h\left(\frac{1}{x+n}\right)$$

avec $h(t) = t + \ln(1-t)$ définie sur $]0, 1[$.

La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $t \in]0,1[$:

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{1-t} = -\frac{t}{1-t} < 0.$$

Ainsi, h est strictement décroissante sur $]0,1[$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x+n}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et à images dans $]0,1[$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et quand $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, f_n croît de $\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ à 0, donc :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| = \left| \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right|.$$

Or, $\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et la série positive $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge, donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et ainsi :

La série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^m f_n(x) &= \sum_{n=2}^m \left[\frac{1}{x+n} + \ln(x+n-1) - \ln(x+n) \right] \\ &= \sum_{n=2}^m \frac{1}{x+n} + \sum_{n=2}^m [\ln(x+n-1) - \ln(x+n)] \\ &= \sum_{n=2}^m \frac{1}{x+n} + \ln(x+1) - \ln(x+m) \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{x+n} - \ln m - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln m + \ln(x+1) - \ln(x+m) \\ &= \left(\sum_{n=0}^m \frac{1}{x+n} - \ln m \right) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln\left(1 + \frac{x}{m}\right) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=0}^m \frac{1}{x+n} - \ln m \right] = -\Psi(x)$ et on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{m}\right) = 0$,

donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=2}^m f_n(x) \right] = -\Psi(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = -\Psi(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$$

III. Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

Q23. La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $0, 1, \dots, n$. Donc, la fonction $h : x \mapsto \ln|P_n(x)|$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $h(x) = \ln|P_n(x)| = \ln|x(x-1)\dots(x-n)| = \sum_{j=0}^n \ln|x-j|$, donc :

$$h'(x) = \frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{x-j}.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $x_{n,k} \in \mathbb{R} \setminus \llbracket 0, n \rrbracket$ et $P'_n(x_{n,k}) = 0$, donc :

$$h'(x_{n,k}) = \frac{P'_n(x_{n,k})}{P_n(x_{n,k})} = 0 = \sum_{j=0}^n \frac{1}{x_{n,k} - j}.$$

Avec $x_{n,k} = \alpha_{n,k} + k$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} = 0.$$

En posant $j' = k - j$ dans la première somme et $j'' = j - k - 1$, on obtient :

$$\sum_{j'=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + j'} + \sum_{j''=0}^{n-k-1} \frac{1}{\alpha_{n,k} - j'' - 1} = \sum_{j'=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + j'} - \sum_{j''=0}^{n-k-1} \frac{1}{-\alpha_{n,k} + j'' + 1} = 0.$$

Soit pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + j} - \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1 - \alpha_{n,k}) + j} = 0}$$

Q24. Soit $t \in]0, 1[$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$nt - 1 < \lfloor nt \rfloor \leq nt \quad \text{et} \quad n(1-t) \leq n - \lfloor nt \rfloor < n(1-t) + 1.$$

Comme $t > 0$ et $1-t > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nt \rfloor = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \lfloor nt \rfloor) = +\infty.$$

On reprend la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ de la question **Q22**.

On a vu que cette série converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+^*$, de somme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_n : x \mapsto -\Psi(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1).$$

Pour tout entier $n \geq 2$, posons :

$$a_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \left| -\Psi(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - \sum_{k=2}^n f_k(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \left| -\Psi(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} + \ln(x+n) \right|.$$

La convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} f_n$ donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Pour tout entier n tel que $\lfloor nt \rfloor \geq 2$ et $n - \lfloor nt \rfloor \geq 2$ (ce qui est possible car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nt \rfloor = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \lfloor nt \rfloor) = +\infty$), on peut écrire, avec $u_n = \alpha_{n, \lfloor nt \rfloor} \in]0, 1[\subset \mathbb{R}_+^*$ et $1 - u_n \in]0, 1[\subset \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \left| -\Psi(u_n) - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{1}{u_n + k} + \ln(u_n + \lfloor nt \rfloor) \right| &\leq a_{\lfloor nt \rfloor} \\ \left| -\Psi(1 - u_n) - \sum_{k=0}^{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \frac{1}{(1 - u_n) + k} + \ln(1 - u_n + n - \lfloor nt \rfloor - 1) \right| &\leq a_{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \end{aligned}$$

Or, avec la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} &\left[-\Psi(u_n) - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{1}{u_n + k} + \ln(u_n + \lfloor nt \rfloor) \right] - \left[-\Psi(1 - u_n) - \sum_{k=0}^{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \frac{1}{(1 - u_n) + k} + \ln(1 - u_n + n - \lfloor nt \rfloor - 1) \right] \\ &= -\Psi(u_n) + \Psi(1 - u_n) - \left(\sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{1}{\alpha_{n, \lfloor nt \rfloor} + k} - \sum_{k=0}^{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \frac{1}{(1 - \alpha_{n, \lfloor nt \rfloor}) + k} \right) \\ &\quad + \ln(u_n + \lfloor nt \rfloor) - \ln(1 - u_n + n - \lfloor nt \rfloor - 1) \\ &= -\Psi(u_n) + \Psi(1 - u_n) + \ln(\lfloor nt \rfloor) + \ln\left(\frac{u_n}{\lfloor nt \rfloor} + 1\right) - \ln(n - \lfloor nt \rfloor) - \ln\left(1 - \frac{u_n}{n - \lfloor nt \rfloor}\right) \\ &= -\Psi(u_n) + \Psi(1 - u_n) + \ln\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n - \lfloor nt \rfloor}\right) + \ln\left(\frac{u_n}{\lfloor nt \rfloor} + 1\right) - \ln\left(1 - \frac{u_n}{n - \lfloor nt \rfloor}\right) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} &\left| \left[-\Psi(u_n) - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{1}{u_n + k} + \ln(u_n + \lfloor nt \rfloor) \right] - \left[-\Psi(1 - u_n) - \sum_{k=0}^{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \frac{1}{(1 - u_n) + k} + \ln(1 - u_n + n - \lfloor nt \rfloor - 1) \right] \right| \\ &\leq \left| -\Psi(u_n) - \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{1}{u_n + k} + \ln(u_n + \lfloor nt \rfloor) \right| + \left| -\Psi(1 - u_n) - \sum_{k=0}^{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \frac{1}{(1 - u_n) + k} + \ln(1 - u_n + n - \lfloor nt \rfloor - 1) \right| \\ &\leq a_{\lfloor nt \rfloor} + a_{n - \lfloor nt \rfloor - 1} \end{aligned}$$

Pour tout entier n assez grand :

$$\left| -\Psi(u_n) + \Psi(1 - u_n) + \ln\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n - \lfloor nt \rfloor}\right) + \ln\left(\frac{u_n}{\lfloor nt \rfloor} + 1\right) - \ln\left(1 - \frac{u_n}{n - \lfloor nt \rfloor}\right) \right| \leq a_{\lfloor nt \rfloor} + a_{n - \lfloor nt \rfloor - 1}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\lfloor nt \rfloor} + a_{n - \lfloor nt \rfloor - 1}) = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\Psi(u_n) - \Psi(1 - u_n) + \ln\left(\frac{n - \lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor}\right) - \ln\left(\frac{u_n}{\lfloor nt \rfloor} + 1\right) + \ln\left(1 - \frac{u_n}{n - \lfloor nt \rfloor}\right) \right) = 0.$$

Comme $0 < u_n < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor nt \rfloor = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \lfloor nt \rfloor) = +\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{u_n}{\lfloor nt \rfloor} + 1 \right) - \ln \left(1 - \frac{u_n}{n - \lfloor nt \rfloor} \right) \right) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\Psi(u_n) - \Psi(1 - u_n) + \ln \left(\frac{n - \lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor} \right) \right) = 0.$$

Et enfin, pour n assez grand, on a $\begin{cases} 0 < nt - 1 < \lfloor nt \rfloor \leq nt \\ 0 < n(1-t) \leq n - \lfloor nt \rfloor < n(1-t) + 1 \end{cases}$, donc :

$$\frac{n(1-t)}{nt} \leq \frac{n - \lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor} < \frac{n(1-t) + 1}{nt - 1} \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} \leq \frac{n - \lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor} < \frac{1-t + \frac{1}{n}}{t - \frac{1}{n}}.$$

Avec le théorème de gendarmes, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor} = \frac{1-t}{t}$, d'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\Psi(u_n) - \Psi(1 - u_n) + \ln \left(\frac{1-t}{t} \right) \right) = 0}$$

Q25. On vient de prouver que pour tout $t \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Psi(u_n) - \Psi(1 - u_n)) = \ln \left(\frac{t}{1-t} \right)$.

L'énoncé donne pour tout $x \in]0, 1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ et comme toutes les fonctions en jeu ici sont dérivables sur $]0, 1[$ (Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $]0, 1[$), on peut écrire pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\Gamma'(x)\Gamma(1-x) - \Gamma(x)\Gamma'(1-x) = \pi \frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

Et comme $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \neq 0$, on a pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\Psi(x) - \Psi(1-x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = \frac{\Gamma'(x)\Gamma(1-x) - \Gamma(x)\Gamma'(1-x)}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \pi \cot(\pi x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha_{n, \lfloor nt \rfloor} \in]0, 1[$, donc on peut écrire :

$$\Psi(u_n) - \Psi(1 - u_n) = \pi \cot(\pi u_n).$$

D'après **Q1**, la fonction $\cot$ réalise une bijection continue de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque, notée arccot , est elle-même une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $]0, \pi[$, vérifiant pour tout $x \in]0, 1[$, $\operatorname{arccot}(\cot(\pi x)) = \pi x$. Ainsi, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{\pi} (\Psi(u_n) - \Psi(1 - u_n)) \right).$$

Par continuité de arccot sur $\mathbb{R}$ et avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} (\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n)) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{t}{1-t} \right)$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{t}{1-t} \right) \right)$$

Problème 2

Q26. On $E = \operatorname{Vect}(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$, donc E est engendré par une famille finie, d'où :

E est de dimension finie.

La famille $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de E .

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que cette famille est libre.

- *Initialisation* : Pour $p=1$, soit $(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_{-1}f_{-1} + \lambda_0f_0 + \lambda_1f_1 = 0$.

Alors, pour tout $x \in J$, on a $\lambda_{-1} \ln(1+x) + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1+x} = 0$. Or :

$$\begin{aligned} \lambda_{-1} \ln(1+x) + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1+x} &= \lambda_{-1} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + \lambda_0 + \lambda_1 (1-x+x^2) + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 + (\lambda_{-1} - \lambda_1)x + \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_{-1}}{2} \right) x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{-1} - \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_{-1} = \lambda_1 = 2\lambda_1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = 0.$$

Ainsi, la famille (f_{-1}, f_0, f_1) est libre et la propriété est vraie au rang 1.

- *Hérédité* : Supposons la propriété vraie à un rang $p-1 \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+2}$ tel que $\lambda_{-1}f_{-1} + \lambda_0f_0 + \lambda_1f_1 + \dots + \lambda_pf_p = 0$.

On a alors pour tout $x \in J$:

$$\lambda_{-1} \ln(1+x) + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1+x} + \dots + \frac{\lambda_p}{(1+x)^p} = 0.$$

Soit :

$$\lambda_{-1}(1+x)^p \ln(1+x) + \lambda_0(1+x)^p + \lambda_1(1+x)^{p-1} + \dots + \lambda_{p-1}(1+x) + \lambda_p = 0.$$

Et en faisant tendre x vers -1 , on obtient $\lambda_p = 0$.

Alors, on a $\lambda_{-1}f_{-1} + \lambda_0f_0 + \lambda_1f_1 + \dots + \lambda_{p-1}f_{p-1} = 0$ et par hypothèse de récurrence, la famille $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{p-1})$ est libre, donc $\lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$.

Ainsi, $\lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et donc la famille $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$ est libre.

La propriété est vraie au rang p .

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la famille $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$ est libre et génératrice de E : c'est une base de E , donc la dimension de E est le cardinal de cette famille, soit :

$$\dim E = p + 2$$

Q27. L'application $\varphi : f \mapsto f(0)$ définie sur E est linéaire, c'est donc une forme linéaire sur E . Elle est non nulle car $\varphi(f_0) = f_0(0) = 1$.

Ainsi, $\ker \varphi = \{f \in E \mid f(0) = 0\} = F$ est un hyperplan de E , donc :

F est bien un hyperplan de E .

Q28. L'application $g : x \mapsto (1+x)f'(x)$ est bien définie sur E car toutes les fonctions f_k sont dérivables sur J , donc toute fonction de E (qui est une combinaison linéaire des f_k) l'est aussi.

On a pour tout $u(f) = \frac{f'}{f_1}$ et les applications $v : h \mapsto \frac{h}{f_1}$ et $d : f \mapsto f'$ sont linéaires (linéarité de la dérivation), donc $u = v \circ d$ l'est aussi.

Enfin :

- $f_{-1}' = f_1$, donc $u(f_{-1}) = f_0$;
- $f_0' = 0$, donc $u(f_0) = 0$;
- pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_k' : x \mapsto -\frac{k}{(1+x)^{k+1}}$, donc $u(f_k) = -k f_k$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$, $u(f_k) \in E$, donc :

$$u(E) = \text{Vect}(u(f_{-1}), u(f_0), u(f_1), \dots, u(f_p)) \subset E.$$

Ainsi :

u est bien un endomorphisme de E .

Q29. On vient de voir que :

$$u(E) = \text{Vect}(u(f_{-1}), u(f_0), u(f_1), \dots, u(f_p)) = \text{Vect}(f_0, 0, -f_1, \dots, -pf_p).$$

Donc :

$$\boxed{\text{Im } u = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_p) = G}$$

Comme la famille $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$ est libre, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_p)$ l'est aussi et donc :

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_p)) = p+1.$$

Par le théorème du rang, on a :

$$\dim \ker u = \dim E - \text{rg}(u) = (p+2) - (p+1) = 1.$$

Or, on a vu que $u(f_0) = 0$, donc $\text{Vect}(f_0) \subset \ker u$ et comme $f_0 \neq 0$ (f_0 est la fonction constante $x \mapsto 1$), on a $\dim(\text{Vect}(f_0)) = 1 = \dim \ker u$, donc :

$$\boxed{\ker u = \text{Vect}(f_0)}$$

Q30. Par définition, $F \subset E$ et on vient de voir que $\text{Im } u = G$, donc l'application $\tilde{u} : \begin{cases} F \rightarrow G \\ f \mapsto u(f) \end{cases}$ est bien définie et est linéaire. De plus :

- F est un hyperplan de E , donc $\dim F = \dim E - 1 = (p+2) - 1 = p+1 = \dim G$;
- $\ker \tilde{u} = \ker u \cap F = \text{Vect}(f_0) \cap F = \{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f_0(0) = \lambda = 0\} = \{0\}$.

Ainsi, $\tilde{u}$ est injective et ses espaces de départ et d'arrivée ont même dimension donc :

$$\boxed{\tilde{u} : \begin{cases} F \rightarrow G \\ f \mapsto u(f) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}}$$

Q31. Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est définie et continue sur J .

- *Initialisation :*

La fonction $x \mapsto \frac{f_{-1}(x)}{1+x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ est définie et continue sur J , donc $h_0 : x \mapsto \int_0^x \frac{f_{-1}(t)}{1+t} dt$

est bien définie et de classe C^1 , donc continue sur J .

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- *Hérédité :*

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, donc h_n est définie et continue sur J .

Alors, la fonction $x \mapsto \frac{h_n(x)}{1+x}$ est bien définie et continue sur J . Alors, $h_{n+1} : x \mapsto \int_0^x \frac{h_n(t)}{1+t} dt$ est bien définie et de classe C^1 , donc continue sur J .

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour $n \in \mathbb{N}$, autrement dit :

La suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies sur J , est correctement définie.

Q32. On a :

$$h_0 : x \mapsto \int_0^x \frac{f_{-1}(t)}{1+t} dt = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt = \left[\frac{1}{2} (\ln(1+t))^2 \right]_0^x = \frac{1}{2} (\ln(1+x))^2$$

$$h_1 : x \mapsto \int_0^x \frac{h_0(t)}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^2 dt = \frac{1}{6} (\ln(1+x))^3$$

Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h_n : x \mapsto \frac{1}{(n+2)!} (\ln(1+x))^{n+2}$.

- *Initialisation* : On vient de la faire : la propriété est vraie au rang $n=0$.
- *Hérédité* : Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$.

Alors, par hypothèse de récurrence, on a pour tout $x \in J$:

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{h_n(t)}{1+t} dt = \int_0^x \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^{n+2} dt \\ &= \left[\frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{n+3} (\ln(1+t))^{n+3} \right]_0^x = \frac{1}{(n+3)!} (\ln(1+x))^{n+3} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n : x \mapsto \frac{1}{(n+2)!} (\ln(1+x))^{n+2}$$

Q33. Pour tout $x \in J$ fixé, la série $\sum \frac{1}{(n+2)!} (\ln(1+x))^{n+2}$ est une série exponentielle, donc converge avec :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} (\ln(1+x))^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\ln(1+x))^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\ln(1+x))^n - \frac{1}{0!} (\ln(1+x))^0 - \frac{1}{1!} (\ln(1+x))^1 \\ &= \exp(\ln(1+x)) - 1 - \ln(1+x) = 1+x-1-\ln(1+x) \end{aligned}$$

Ainsi :

La série $\sum h_n$ converge simplement sur J et a pour somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) = x - \ln(1+x)$.

Q34. La fonction S est une différence de deux fonctions de classe C^1 sur J , donc :

La fonction S est de classe C^1 (donc dérivable) sur J .

Q35. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$:

$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^n h_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} h_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)!} (\ln(1+x))^{k+2} \right| = \left| \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\ln(1+x))^k \right|.$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}_+^* \subset J$, on a :

$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^n h_k(x) \right| = \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{k!} (\ln(1+x))^k \geq \frac{1}{(n+3)!} (\ln(1+x))^{n+3}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+3)!} (\ln(1+x))^{n+3} = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| S(x) - \sum_{k=0}^n h_k(x) \right| = +\infty$ par comparaison,

donc la fonction $S - \sum_{k=0}^n h_k$ n'est pas bornée sur J , donc ne possède pas de norme infinie sur cet intervalle. Ainsi :

La série $\sum h_n$ ne converge pas uniformément sur J .

Soit $[a, b] \subset J$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\ln(1+a) \leq \ln(1+x) \leq \ln(1+b).$$

Donc, $|\ln(1+x)| \leq \max(|\ln(1+a)|, |\ln(1+b)|) = M$ et :

$$|h_n(x)| = \frac{1}{(n+2)!} |\ln(1+x)|^{n+2} \leq \frac{M^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Ainsi, h_n est bornée sur $[a, b]$ avec $\max_{x \in [a, b]} |h_n(x)| \leq \frac{M^{n+2}}{(n+2)!}$. Comme la série $\sum \frac{M^{n+2}}{(n+2)!}$ converge, la série $\sum h_n$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, b]$, donc converge normalement sur $[a, b]$ et ainsi :

La série $\sum h_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset J$.

Q36. Par définition de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$:

$$h'_{n+1}(x) = \frac{h_n(x)}{1+x} = \frac{1}{(n+2)!} \frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{1+x}.$$

Posons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} h'_k(x)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} h'_k(x) = h'_{n+1}(x) + R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+2)!} \frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{1+x} + R_{n+1}(x).$$

Et :

$$R_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} h'_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} h'_{k+1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h_k(x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(x) = \frac{S(x)}{1+x} = 1 - \frac{1 + \ln(1+x)}{1+x}.$$

Par croissances comparées, $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} R_0(x) = 1$.

Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} R_n(x) = 1$.

- On vient de voir que la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} R_n(x) = 1$ et par

croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{1+x} = 0$.

Avec $R_{n+1}(x) = R_n(x) - \frac{1}{(n+2)!} \frac{(\ln(1+x))^{n+2}}{1+x}$, on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x) = 1 - 0 = 1.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci implique que dans le cas où $\sup_{x \in J} |R_n(x)|$ existe, on a $\sup_{x \in J} |R_n(x)| \geq 1$ et on ne peut donc avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{x \in J} |R_n(x)| = 0$. Ceci permet d'affirmer que :

La série $\sum h'_n$ ne converge pas uniformément sur J .

Soit $[a, b] \subset J$. Avec à nouveau $M = \max(|\ln(1+a)|, |\ln(1+b)|)$, on a $0 < 1+a \leq 1+x \leq 1+b$,

donc $0 < \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+a}$ pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|h'_{n+1}(x)| = \frac{|h_n(x)|}{1+x} \leq \frac{1}{1+a} \frac{M^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Ainsi, h'_{n+1} est bornée sur $[a, b]$ avec $\max_{x \in [a, b]} |h'_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{1+a} \frac{M^{n+2}}{(n+2)!}$. Comme la série $\sum \frac{1}{1+a} \frac{M^{n+2}}{(n+2)!}$ converge, la série $\sum h'_n$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, b]$, donc converge normalement sur $[a, b]$ et ainsi :

La série $\sum h'_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset J$.

Ainsi, pour tout $[a, b] \subset J$:

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est de classe C^1 sur J ;
- la série $\sum h_n$ converge simplement sur J , donc sur $[a, b]$;
- la série $\sum h'_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a, b]$.

Ceci permet de conclure que la fonction S est de classe C^1 sur tout segment $[a, b] \subset J$, donc :

La fonction S est de classe C^1 sur J .