

DS de Mathématiques n° 2
4 heures
Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 4 pages.
Problème 1

– extrait adapté de Mines-Pont 2006, MP, Mathématiques 2 –

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle P_n le polynôme de degré $n+1$:

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n).$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique n des racines de la dérivée de P_n lorsque n tend vers l'infini.

On notera $\cot$ la fonction définie sur $]0, \pi[$ par :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ désignera sa partie entière.

Les parties I et II sont indépendantes.

Q1. Montrer que la fonction $\cot$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$.

On notera arccot sa bijection réciproque.

I. Quelques propriétés des racines de P_n'

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, P_n' admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun l'intervalle $]k, k+1[$.

On note $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k \in]0, 1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,k}$.

Q3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en calculant les coefficients des termes de degré $n-1$ et n du polynôme P_n' , exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}$ en fonction de n .

Q4. En comparant $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$, exprimer $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Q5. Déterminer la valeur de $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$.

L'entier $n \geq 2$ est fixé. Le but des questions suivantes est de montrer que la suite des $x_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.

Q6. Dresser, en fonction de la parité de n , le tableau de variations de $x \mapsto P_n(x)$.

On y fera apparaître les réels $x_{n,k}$ ainsi que les entiers $0, 1, \dots, n$. On pourra s'inspirer du modèle suivant :

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\dots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\dots$
P_n'												
P_n												

Q7. Déterminer le signe de $(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k})$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Q8. En utilisant la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k} P_n'(x_{n-1,k})$ pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

Q9. En déduire que $x_{n-1,k} > x_{n,k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.

Q10. En utilisant l'identité $P_n(X) = X P_{n-1}(X-1)$, déterminer, en fonction de k et n , le signe de $(-1)^{n-k} P_n'(1+x_{n-1,k-1})$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Q11. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.

Q12. Conclure.

II. Un développement asymptotique

On considère ici une fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- Γ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- pour tout $x \in]0, 1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

On admet l'existence d'une telle fonction et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

On admet que Ψ est croissante.

Q13. Déterminer $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 2$. On donnera le résultat en fonction de n et $\Gamma(1)$.

Q14. Calculer le développement asymptotique à 3 termes (plus le terme négligeable) de $\frac{\ln(\Gamma(n))}{n}$.

Q15. Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Le but des questions suivantes de cette partie est de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} - \ln m \right] = 0.$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\phi(x) = \Psi(x) - \ln x.$$

Q16. Montrer que la série de terme général $\phi(n+1) - \phi(n)$ converge.

Q17. Justifier que la suite $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Soit C sa limite.

Q18. Établir que l'on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = C$.

Q19. Montrer que si $C \neq 0$, $\int_1^x \phi(t) dt \sim Cx$.

Q20. En déduire que $C = 0$.

Q21. Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

Q22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n} + \ln(x+n-1) - \ln(x+n)$, fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa somme.

III. Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

Soit un entier $n \geq 2$ fixé.

Q23. En dérivant de deux façons la fonction $x \mapsto \ln|P_n(x)|$ quand elle est dérivable, montrer que :

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + j} - \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1-\alpha_{n,k}) + j} = 0.$$

Q24. Pour $t \in]0,1[$ fixé, on pose $u_n = \alpha_{n, \lfloor nt \rfloor}$. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln\left(\frac{1-t}{t}\right) \right] = 0.$$

Q25. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

Problème 2

– extrait très adapté de E3A, 2021, PSI –

Dans ce problème p est un entier naturel non nul.

On pose $J =]-1, +\infty[$ et on définit sur J les fonctions $f_{-1} : x \mapsto \ln(1+x)$ et pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$:

$$f_k : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^k}.$$

On pose alors :

$$E = \text{Vect}(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$$

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$$

$$G = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_p)$$

Q26. Justifier que E est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Q27. Montrer que F est un hyperplan de E .

☺ On pourra introduire l'application $f \mapsto f(0)$ définie sur E .

Pour tout $f \in E$, on note $g : x \mapsto (1+x)f'(x)$ et on définit sur E l'application $u : f \mapsto g$.

Q28. Montrer que u est un endomorphisme de E .

Q29. Déterminer $\ker u$ et $\text{Im } u$.

Q30. En déduire que $\tilde{u} : \begin{cases} F \rightarrow G \\ f \mapsto u(f) \end{cases}$ est un isomorphisme.

On appelle h_0 la primitive sur J de $x \mapsto \frac{f_{-1}(x)}{1+x}$ qui s'annule en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note h_{n+1} la primitive sur J de $x \mapsto \frac{h_n(x)}{1+x}$ qui s'annule en 0.

Q31. Justifier que l'on définit alors correctement une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur J .

Q32. Déterminer h_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q33. Montrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur J et calculer sa somme S .

Q34. La fonction S est-elle dérivable sur J ? de classe C^1 sur J ?

Q35. La série $\sum h_n$ converge-t-elle uniformément sur J ? sur tout segment de J ?

Q36. La série $\sum h'_n$ converge-t-elle uniformément sur J ? sur tout segment de J ? Retrouver alors le résultat de la question **Q34** sans utiliser l'expression de S trouvée dans la question **Q33**.

- FIN DU SUJET -