

Corrigé du DS n° 3
Problème 1
A – Préliminaires

Q1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = -\frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi :

$$a_{n+1} - a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum \left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ converge et par comparaison de séries de signe constant à partir d'un certain rang :

La série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge.

Q2. Comme la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge, on a par le théorème liant suite et série :

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Si on note γ la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a $a_n - \gamma = H_n - \ln n - \gamma = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$, soit :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

Q3. Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} \left[\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = 1 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et d'après la règle de d'Alembert appliquée aux séries entières :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum (\ln n) x^n$ est 1.

Si D est le domaine de définition de f , la somme de la série entière $\sum (\ln n) x^n$, de rayon de convergence égal à 1, on a :

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

Or, les suites $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $((-1)^n \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas bornées, donc les séries $\sum \ln n$ et $\sum (\ln n)(-1)^n$ divergent grossièrement, et ainsi, la fonction f n'est définie ni en 1, ni en -1 .

Ainsi :

Le domaine de définition de f est $]-1, 1[$.

B – Étude de f en 1

Q4. La fonction f est la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1, donc elle dérivable sur $]-1, 1[$ avec pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) n x^{n-1}$.

Pour tout $x \in [0; 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\ln n) n x^{n-1} \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $[0; 1[$. Le théorème de la limite monotone permet alors d'affirmer que f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure avec $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout $x \in [0; 1[$, on a $f(x) \leq L$. Or, pour tout $x \in [0; 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\ln n) x^n \geq 0$, donc pour tout $x \in [0; 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$(\ln N) x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n = f(x).$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, on obtient alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\ln N \leq L$, ce qui est absurde car $\ln N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \in \mathbb{R}$ mène à une absurdité, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

Q5. On a vu que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ et $\ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\gamma + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\ln n)$ et :

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

Or, on a vu dans la question **Q3**, que le rayon de convergence la série entière $\sum (\ln n) x^n$ est 1, donc par comparaison :

Le rayon de convergence la série entière $\sum H_n x^n$ est 1.

Q6. Le rayon de convergence deux séries entières $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ est égal à 1. On peut donc former le produit de Cauchy de leurs sommes sur $] -1; 1[$.

En posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$, on a pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k \times 1 \right) x^n = \sum_{k=0}^0 u_k + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = g(x).$$

Or, pour tout $x \in] -1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, donc :

$$(-\ln(1-x)) \left(\frac{1}{1-x} \right) = g(x).$$

Soit, pour tout $x \in] -1; 1[$:

$$g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

Q7. Pour tout $x \in [0; 1[$:

$$|f(x) - g(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n - H_n) x^n \right|.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|(\ln n - H_n) x^n| = |\ln n - H_n| x^n \leq (\ln n) x^n + H_n x^n$ et les séries $\sum (\ln n) x^n$ et $\sum H_n x^n$ convergent, donc $\sum |(\ln n - H_n) x^n|$ converge et on peut écrire :

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |(\ln n - H_n) x^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\ln n - H_n| x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| x^n.$$

Or, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, donc est bornée et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M x^n = M \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{M}{1-x}.$$

Finalement :

$$\text{Il existe un réel } M > 0 \text{ tel que pour tout } x \in [0; 1[, |f(x) - g(x)| \leq \frac{M}{1-x}.$$

Q8. D'après la question **Q6**, on a $g(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$ pour tout $x \in]-1; 1[$ et d'après la question précédente, $|f(x) - g(x)| \leq \frac{M}{1-x}$ pour tout $x \in [0; 1[$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x)] = +\infty$, donc $\frac{M}{1-x} = o_{x \rightarrow 1^-}(g(x))$ et ainsi, on peut écrire :

$$f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow 1^-}(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow 1^-}(g(x)).$$

Soit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x)$$

C – Étude de f en -1

Q9. On a $c_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $c_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

Or le rayon de la série entière $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ est le même que celui de $\sum x^n$, soit 1.

Par comparaison :

$$\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum c_n x^n \text{ est } 1.$$

Comme $c_n \sim \frac{1}{2n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge, les séries $\sum c_n$ et $\sum c_n (-1)^n$ convergent absolument, donc convergent et ainsi :

$$\text{Le domaine de définition de } h \text{ est } [-1, 1].$$

Q10. Pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k &= c_1 + \sum_{k=2}^n \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right) = -1 + \sum_{k=2}^n \left(\ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$ et, par télescopage, $\sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) = \ln n - \ln 1 = \ln n$, donc :

$$\sum_{k=1}^n c_k = \ln n - H_n = -a_n.$$

Or, on a vu dans la question **Q2** que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ , donc :

La série numérique $\sum c_n$ converge et sa somme vaut $-\gamma$.

Q11. Par concavité de la fonction $\ln$, on a pour tout $h \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+h) \leq h$. Or, pour tout entier

$n \geq 2$, on a $-\frac{1}{n} \in]-1, +\infty[$, donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$, soit $c_n \geq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $h_n : x \mapsto c_n x^n$, fonction polynômiale donc continue sur $[-1, 1]$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on a $\max_{[-1, 1]} |f_n| = c_n$ et on vient de voir que la série $\sum c_n$ converge.

Ceci implique que $\sum h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$.

Les hypothèses sont réunies pour conclure que $h = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k$ est continue sur $[-1, 1]$ et ainsi :

La fonction h est continue en -1 et 1 .

Q12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout entier $k \geq 2$, $c_k = \ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k}$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k &= -c_1 + \sum_{k=2}^{2p} (-1)^k c_k = 1 + \sum_{k=2}^{2p} (-1)^k \left(\ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{2p} (-1)^k \ln k - \sum_{k=2}^{2p} (-1)^k \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{2p} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{2p} (-1)^k \ln k + \sum_{k=2}^{2p} (-1)^{k-1} \ln(k-1) + 1 + \sum_{k=2}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k \ln k + \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^k \ln k + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2 \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k \ln k - \ln(2p) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k \ln k &= \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2p} \ln k - \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2p} \ln k = 2 \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2p} \ln k - \sum_{k=1}^{2p} \ln k \\ &= 2 \sum_{k=1}^p \ln(2k) - \sum_{k=1}^{2p} \ln k = 2 \sum_{k=1}^p \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^p \ln k - \sum_{k=1}^{2p} \ln k \\ &= 2p \ln 2 + 2 \ln(p!) - \ln((2p)!) = \ln \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k = 2 \ln \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right) - \ln(2p) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln \left[\left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \frac{1}{2p} \right] + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k = \ln \left(\frac{2^{4p} (p!)^4}{2p ((2p)!)^2} \right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}$$

Q13. Avec la formule de Stirling, on a :

$$\frac{2^{4p} (p!)^4}{2p ((2p)!)^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{4p} \left(\sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e} \right)^p \right)^4}{2p \left(\sqrt{4\pi p} \left(\frac{2p}{e} \right)^{2p} \right)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Par continuité de la fonction $\ln$, on obtient alors :

$$\left(\frac{2^{4p} (p!)^4}{2p ((2p)!)^2} \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

D'après le rappel, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$, donc :

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k c_k = \ln \left(\frac{\pi}{2} \right) + \ln 2.$$

Par ailleurs, on a pour tout $x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln k) x^k$ et :

$$h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^k = -x + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k} \right) x^k.$$

Or, pour tout $x \in]-1; 1[$, les séries $\sum (\ln k) x^k$, donc $\sum (\ln(k-1)) x^k$, et $\sum \frac{x^k}{k}$ convergent, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (\ln k) x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} (\ln(k-1)) x^k - x - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=2}^{+\infty} (\ln k) x^k - x \sum_{k=2}^{+\infty} (\ln(k-1)) x^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln k) x^k - x \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln k) x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = (1-x) \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln k) x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = (1-x) f(x) + \ln(1-x) \end{aligned}$$

Et comme pour tout $x \in]-1; 1[$, $1-x \neq 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \frac{h(x) - \ln(1-x)}{1-x}.$$

Comme h est continue en -1 (Q11), on obtient alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{h(x) - \ln(1-x)}{1-x} = \frac{h(-1) - \ln 2}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k c_k - \ln 2}{2}.$$

Soit, avec $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k c_k = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln 2$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Problème 2

I Généralités

Q14. Soit $\varphi : \mathcal{X}_n \rightarrow \{0,1\}^{n^2}$; $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket} \mapsto (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$.

Une matrice étant parfaitement déterminée par ses coefficients, φ est une bijection.

Or, $\{0,1\}^{n^2}$ est un ensemble fini de cardinal 2^{n^2} . Donc :

$$\mathcal{X}_n \text{ est un ensemble fini, de cardinal } 2^{n^2}.$$

Q15. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_2$ avec $a, b, c, d = 0$ ou 1 .

On a $ad = 0$ ou 1 et $bc = 0$ ou 1 , donc $\det M = ad - bc = -1, 0$ ou 1 .

Alors, $M \in \mathcal{X}_2^I = \mathcal{X}_2 \cap GL_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det M = -1$ ou 1 .

Considérons les deux cas.

- $\det M = ad - bc = 1$ si et seulement si $ad = bc + 1$.

Or, $ad \leq 1$ et $bc + 1 \geq 1$ (car $a, b, c, d \in \{0,1\}$). Donc, $ad = bc + 1 = 1$, soit $\begin{cases} ad = 1 \\ bc = 0 \end{cases}$ ou

encore $\begin{cases} a = d = 1 \\ b = 0 \text{ ou } c = 0 \end{cases}$. On obtient trois matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\det M = ad - bc = -1$ si et seulement si $bc = ad + 1$ et avec le même raisonnement que ci-dessus, on obtient $\begin{cases} b = c = 1 \\ a = 0 \text{ ou } d = 0 \end{cases}$ et les trois matrices : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\mathcal{X}_2^I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques réelles donc diagonalisables sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral.

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont triangulaires avec des 1 sur la diagonale, donc ont 1 pour seule valeur propre. Si elles étaient diagonalisables, elles seraient semblables à I_2 , donc égales à I_2 , ce qui est faux. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Les matrices de $\mathcal{X}'_2$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q16. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(\mathcal{X}'_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(\mathcal{X}'_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(\mathcal{X}'_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(\mathcal{X}'_2)$$

Ainsi, les quatre vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartiennent à $\text{Vect}(\mathcal{X}'_2(\mathbb{R}))$, donc :

L'ensemble $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q17. Soit maintenant $n \geq 2$. On a $I_n \in \mathcal{X}'_n$.

Notons $E_{i,j}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$).

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $I_n + E_{i,j}$ est une matrice dont tous les coefficients valent 0 ou 1 et triangulaire dont tous les coefficients diagonaux, donc inversible.

Ainsi, $I_n + E_{i,j} \in \mathcal{X}'_n$ et donc, $E_{i,j} = (I_n + E_{i,j}) - I_n \in \text{Vect}(\mathcal{X}'_n)$.

Notons $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On a $\text{Im } J_n = \text{Vect}(e_n, e_1, \dots, e_{n-1}) = \mathbb{R}^n$, donc J_n est inversible et comme tous ses coefficients valent 0 ou 1, $J_n \in \mathcal{X}'_n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J_n + E_{i,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_n$ et :

$$\begin{aligned} \text{Im}(J_n + E_{i,i}) &= \text{Vect}(e_n, e_1, \dots, e_{i-2}, e_{i-1} + e_i, e_i, \dots, e_{n-1}) \\ &= \text{Vect}(e_n, e_1, \dots, e_{i-2}, e_{i-1}, e_i, \dots, e_{n-1}) = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Donc, $J_n + E_{i,i}$ est inversible et ainsi, $J_n + E_{i,i} \in \mathcal{X}_n'$.

Alors, $E_{i,i} = (J_n + E_{i,i}) - J_n \in \text{Vect}(\mathcal{X}_n')$.

Finalement, tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\text{Vect}(\mathcal{X}_n')$, donc :

L'ensemble $\mathcal{X}_n'$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q18. Notons $(E_1, \dots, E_{n-1}, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Par définition $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{X}_n$. De plus, les colonnes de toute matrice M de $\mathcal{P}_n$ sont les $E_1, \dots, E_{n-1}, E_n$ mais dans un ordre différent., donc $\text{Im } M = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) = \mathbb{R}^n$ et ainsi, M est inversible.

On a donc $\mathcal{P}_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ et ainsi :

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R}) = \mathcal{X}_n'$$

En reprenant la matrice J_n de la question précédente, on a $J_n + E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_n'$, mais

pas $J_n + E_{1,1} \in \mathcal{P}_n$, donc :

$$\mathcal{P}_n \neq \mathcal{X}_n'$$

On aurait aussi pu prendre plus simplement $I_n + E_{1,2} \dots$

II Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$

Q19. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \geq 2$, $|\det M| < n!$ pour tout $M \in \mathcal{X}_n$.

- Pour $n = 2$, on a vu dans la question **Q15** que pour tout $M \in \mathcal{X}_2$, $\det M \in \{-1, 0, 1\}$.

Alors, $|\det M| \leq 1 < 2$ et la propriété est vraie au rang $n = 2$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 2$.

Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{X}_{n+1}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, appelons M_i la matrice $n \times n$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la dernière colonne de M .

Comme les coefficients de M_i sont des coefficients de M , ils appartiennent à $[0, 1]$, et donc $M_i \in \mathcal{X}_n$ et donc, par hypothèse de récurrence, $|\det M_i| < n!$

En développant par rapport à la dernière colonne, on a :

$$|\det M| = \left| \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} a_{i,n+1} \det M_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_{i,n+1}| |\det M_i|.$$

Avec $|a_{i,n+1}| = a_{i,n+1} \leq 1$ et $|\det M_i| < n!$ pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on obtient :

$$|\det M| < \sum_{i=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 2$, soit :

Pour tout $M \in \mathcal{X}_n$, $|\det M| < n!$

Q20. On vu dans la question **Q14** que $\mathcal{X}_n$ est fini, donc $\{\det M, M \in \mathcal{X}_n\}$ est aussi un ensemble fini et ainsi :

Le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$.

On note $x_n = \max_{M \in \mathcal{X}_n} (\det M)$.

Q21. Soit un entier $n \geq 2$ et une matrice M de $\mathcal{X}_n$ telle que $\det M = x_n$ (ceci est possible car x_n est un *maximum*).

Considérons la matrice construite par blocs : $M' = \begin{pmatrix} M & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Les coefficients de M' sont soit des coefficients de M , donc égaux à 0 ou 1, soit 0, soit 1.

Ainsi, $M' \in \mathcal{X}_{n+1}$ et donc $\det M' \leq x_{n+1}$.

Or, en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient $\det M' = \det M = x_n$ et ainsi $x_n \leq x_{n+1}$, ce qui prouve que :

La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Q22. Toutes les colonnes de J sont égales et non nulles, donc $\text{rg}(J) = 1$. Ainsi, $\dim \ker J = n - 1$ et donc 0 est valeur propre de J , de multiplicité au moins $n - 1$. Ceci veut dire que le polynôme caractéristique de J s'écrit $\chi_J = X^{n-1}(X - \lambda)$. Alors, $\text{tr}(J) = (n - 1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda = n$.

Ainsi, $\chi_J = \det(X I_n - J) = X^{n-1}(X - n)$ et donc :

$$\det M = \det(J - I_n) = (-1)^n \det(I_n - J) = (-1)^n \chi_J(1) = (-1)^n (1 - n).$$

Soit :

$$\det M = (-1)^{n-1} (n - 1)$$

Les coefficients de M valent 0 (sur la diagonale) ou 1 (ailleurs), donc $M \in \mathcal{X}_n$ et ainsi :

$$\det M = (-1)^{n-1} (n - 1) \leq x_n.$$

En particulier, pour n impair, $n - 1 \leq x_n$. Ceci prouve que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ n'est pas majorée et comme elle est croissante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

III Matrices de permutations

Q23. Par définition des matrices P_σ , l'application de S_n sans $\mathcal{P}_n$ qui à $\sigma \in S_n$ associe P_σ est une bijection. Or, S_n est fini de cardinal $n!$ donc :

$$\mathcal{P}_n \text{ est fini et son cardinal vaut } n!$$

Q24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $[M^\top M]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [M]_{k,i} [M]_{k,j}$.

Or, par définition, $M \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $M^\top M = I_n$, soit $[M^\top M]_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, autrement dit :

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si pour tous } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n [M]_{k,i} [M]_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

Q25. Procédons par double inclusion.

- Soit $P_\sigma \in \mathcal{P}_n$. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[P_\sigma]_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}$, donc :

$$\sum_{k=1}^n [P_\sigma]_{k,i} [P_\sigma]_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{k, \sigma(i)} \delta_{k, \sigma(j)} = \delta_{\sigma(i), \sigma(j)}.$$

Or, σ est une bijection, donc est injective et $\sigma(i) = \sigma(j)$ si et seulement si $i = j$, donc :

$$\sum_{k=1}^n [P_\sigma]_{k,i} [P_\sigma]_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

D'après la question précédente, ceci prouve que $P_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{X}_n$, on a :

$$P_\sigma \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R}).$$

Ceci prouve que :

$$\underline{\mathcal{P}_n \subset \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R}).}$$

- Soit $M \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$.

Comme $M \in \mathcal{X}_n$, $[M]_{k,i}, [M]_{k,j} \in \{0,1\}$ donc $[M]_{k,i} [M]_{k,j} \in \{0,1\}$ pour tous $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme $M \in O_n(\mathbb{R})$, $M^T M = I_n$ donc $\sum_{k=1}^n [M]_{k,i} [M]_{k,j} = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Si $i = j$, alors $\sum_{k=1}^n [M]_{k,i} [M]_{k,i} = 1$ et il existe un unique $k_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $[M]_{k_i,i}^2 = 1$, soit $[M]_{k_i,i} = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k_i\}$, $[M]_{k,i}^2 = 0$, soit $[M]_{k,i} = 0$, soit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{k,i} = \delta_{k,k_i}$.
- Si $i \neq j$, alors $\sum_{k=1}^n [M]_{k,i} [M]_{k,j} = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{k,i} [M]_{k,j} = 0$.

En particulier, pour $k = k_i$, on obtient $[M]_{k_i,i} [M]_{k_i,j} = [M]_{k_i,j} = 0$.

On vient donc de prouver que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique $k_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k_i\}$, $[M]_{k,i} = 0$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, $[M]_{k_i,j} = 0$.

Posons $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket ; i \mapsto k_i$. Soit $i, i' \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\sigma(i) = \sigma(i')$, c'est-à-dire $k_i = k_{i'}$.

Si $i \neq i'$, alors $i' \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, donc $[M]_{k_i,i'} = 0$. Mais, $[M]_{k_i,i'} = [M]_{k_{i'},i'} = 1$, ce qui est absurde, donc $i = i'$.

Ainsi, σ est injective, donc bijective car $\llbracket 1, n \rrbracket$ est fini. On vient donc de trouver $\sigma \in S_n$ telle que pour tous $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{k,i} = \delta_{k,\sigma(i)}$, donc $M = P_\sigma \in \mathcal{P}_n$.

Ceci prouve que :

$$\underline{\mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}_n.}$$

Ainsi, on a bien :

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$$

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. On a $M^T M = I_n$, donc :

$$\det(M^T M) = \det M^T \times \det M = (\det M)^2 = \det I_n = 1.$$

Ainsi, $\det M \neq 0$, donc $O_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{P}_n \subset O_n$, on obtient :

$$\mathcal{P}_n \subset GL_n(\mathbb{R})$$

Q26. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^n [P_\sigma]_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n \delta_{i, \sigma(j)} e_i = e_{\sigma(j)}$, donc on a bien :

$$u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

Q27. Soient σ et σ' deux éléments de S_n . D'après la question précédente, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j) = u_\sigma(u_{\sigma'}(e_j)) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))} = e_{\sigma \circ \sigma'(j)}.$$

Ainsi, $u_\sigma \circ u_{\sigma'}$ et $u_{\sigma \circ \sigma'}$ coïncident en tous les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'affirmer que $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma \circ \sigma'}$, soit :

$$P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$$

Q28. Soit $\sigma \in S_n$ donnée. Notons $\Theta : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow S_n \\ k \mapsto \sigma^k \end{cases}$. On a $\Theta(\mathbb{Z}) \subset S_n$.

Comme $\mathbb{Z}$ est infini, si Θ était injective, $\Theta(\mathbb{Z})$, donc S_n seraient infinis. Ceci est absurde car S_n est fini. Ainsi :

$$\text{L'application } \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow S_n \\ k \mapsto \sigma^k \end{cases} \text{ n'est pas injective.}$$

Comme Θ n'est pas injective, il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n_1 < n_2$ et $\Theta(n_1) = \Theta(n_2)$, soit $\sigma^{n_2} = \sigma^{n_1}$. En posant $N = n_2 - n_1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\sigma^{n_1} \sigma^N = \sigma^{n_1+N} = \sigma^{n_1}$. Or, σ est bijective, donc σ^{n_1} l'est aussi et on peut écrire $\sigma^N = (\sigma^{n_1})^{-1} \sigma^{n_1} \sigma^N = (\sigma^{n_1})^{-1} \sigma^{n_1} = Id_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

Ainsi :

$$\text{Il existe } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma^N = Id_{\llbracket 1, n \rrbracket}.$$

Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\sigma^k} = P_{\sigma}^k$.

- Pour $k=1$, $P_{\sigma^1} = P_{\sigma} = P_{\sigma}^1$: la propriété est vraie.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\sigma^{k+1}} &= P_{\sigma \circ \sigma^k} = P_{\sigma} P_{\sigma^k} && \text{d'après Q27} \\ &= P_{\sigma} P_{\sigma}^k && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= P_{\sigma}^{k+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

En particulier, on peut écrire $P_{\sigma}^N = P_{\sigma^N} = P_{Id_{[1,n]}} = I_n$ et donc le polynôme $X^N - 1$ est annulateur de P_{σ} . Or, ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (les N racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unités), donc P_{σ} admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ce qui permet de conclure que P_{σ} est diagonalisable. Ceci est vrai pour tout $\sigma \in S_n$, donc :

Toutes les matrices de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

Q29. Posons $v = e_1 + e_2 + \dots + e_n = (1, 1, \dots, 1)$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on a :

$$u_{\sigma}(v) = u_{\sigma}\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n u_{\sigma}(e_i) = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)}.$$

Or, σ est une bijection, donc $\sigma(i)$ décrit $\llbracket 1, n \rrbracket$ quand i décrit $\llbracket 1, n \rrbracket$ et ainsi :

$$u_{\sigma}(v) = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)} = \sum_{k=1}^n e_k = v.$$

On vient donc d'établir que v est un vecteur propre commun à toutes les matrices de $\mathcal{P}_n$.

Tout vecteur non nul de $\text{Vect}(v)$ est alors vecteur propre commun à toutes les matrices de $\mathcal{P}_n$.

Soit maintenant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur propre commun à toutes les matrices de $\mathcal{P}_n$.

Pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $\lambda_{\sigma} \in \mathbb{C}$ tel que $u_{\sigma}(x) = \lambda_{\sigma} x$, soit :

$$\sum_{i=1}^n x_i u_{\sigma}(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{k=\sigma(i)}^n x_{\sigma^{-1}(k)} e_k = \lambda_{\sigma} \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n \lambda_{\sigma} x_k e_k.$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_{\sigma^{-1}(k)} = \lambda_{\sigma} x_k$, ou bien pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \lambda_{\sigma} x_{\sigma(i)}$.

Comme x est un vecteur propre, il n'est pas nul. Il existe donc $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{\ell} \neq 0$.

Considérons une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui laisse ℓ invariant et qui réalise une permutation circulaire des tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\ell\}$ (chaque élément de l'ensemble $\{1, \dots, \ell-1, \ell+1, \dots, n\}$ est transformé en le suivant, n étant transformé en 1, si $\ell \neq n$).

On a alors :

- $x_\ell = \lambda_\sigma x_\ell$, donc $\lambda_\sigma = 1$ (car $x_\ell \neq 0$) ;
- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\ell\}$, $x_i = \lambda_\sigma x_{\sigma(i)} = x_{\sigma(i)}$, soit $x_i = x_j$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\ell\}$.

Si tous les x_i pour $i \neq \ell$ sont nuls, alors $x = x_\ell e_\ell$ qui n'est pas invariant par n'importe que permutation qui ne laisse pas e_ℓ invariant. C'est absurde, donc tous les x_i pour $i \neq \ell$ sont non nuls et en faisant le raisonnement ci-dessus pour un entier différent du ℓ choisi initialement, on obtient finalement que $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, soit $x \in \text{Vect}(v) \setminus \{0\}$.

Finalement :

Les vecteurs propres communs à toutes les matrices de $\mathcal{P}_n$ sont ceux de $\text{Vect}(v) \setminus \{0\}$.

Q30. Rappelons que $v = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

- $x \in D = \text{Vect}(v)$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$;
- $x \in H = D^\perp = (\text{Vect}(v))^\perp$ si et seulement si $\langle x, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i = 0$.

a) Les deux sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont stables par tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, donc par tous les u_σ quand σ décrit S_n .

D'après la question précédente, la droite $D = \text{Vect}(v)$ est elle aussi stable par tous les u_σ quand σ décrit S_n .

Pour tout $\sigma \in S_n$ et pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H$:

$$u_\sigma(x) = \sum_{i=1}^n x_i u_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{k=\sigma(i)}^n x_{\sigma^{-1}(k)} e_k.$$

Donc, $\langle u_\sigma(x), v \rangle = \sum_{k=1}^n x_{\sigma^{-1}(k)} = \sum_{i=\sigma^{-1}(k)}^n x_i = 0$ et ainsi, $u_\sigma(x) \in H$. Ceci prouve que H est stable par tous les u_σ quand σ décrit S_n .

Ainsi :

$\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, D et H sont bien stables par u_σ pour tout $\sigma \in S_n$.

b) Comme V n'est pas inclus dans D , il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$ tels que $i < j$ et $x_i \neq x_j$. Notons alors $\tau_{i,j}$ la permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui échange i et j , et laisse invariant tous les autres éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a $u_{\tau_{i,j}}(x) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \in V$, et comme V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a $u_{\tau_{i,j}}(x) - x \in V$, et comme $x_j - x_i \neq 0$:

$$\frac{1}{x_j - x_i} (u_{\tau_{i,j}}(x) - x) = \frac{1}{x_j - x_i} (0, \dots, x_j - x_i, \dots, x_i - x_j, \dots, 0) = e_i - e_j \in V.$$

Ainsi :

Il existe un couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$.

Si, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ on note $\tau_{i,k}$ la permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui échange i et k , et laisse invariant tous les autres éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a avec $e_i - e_j \in V$:

$$u_{\tau_{i,k}}(e_i - e_j) = u_{\tau_{i,k}}(e_i) - u_{\tau_{i,k}}(e_j) = e_{\tau_{i,k}(i)} - e_{\tau_{i,k}(j)} = e_k - e_j \in V$$

Ainsi :

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k - e_j \in V$.

Remarquons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k - e_j \in H$ (la somme des coordonnées de $e_k - e_j$ est nulle). Or, la famille $(e_k - e_j)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}}$ est libre (car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ l'est) et contient $n-1 = \dim H$ vecteurs : c'est donc une base de H et ainsi, $H = \text{Vect}\left((e_k - e_j)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}}\right)$.

En reprenant les notations de la question précédentes, on a $e_k - e_j \in V$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$, donc $H = \text{Vect}\left((e_k - e_j)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}}\right) \subset V$.

Ainsi, si la sous-espace V n'est pas contenu dans la droite D , autrement dit, V est différent de $\{0\}$ et D , alors l'hyperplan H est inclus dans V , autrement dit, V est égal à H ou $\mathbb{R}^n$ (les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ contenant H). Ceci permet de conclure que V est égal à $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, D ou H . Finalement :

Les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par u_σ pour tout σ de S_n sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, D et H .

Q31. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M . Par hypothèse, $\mathcal{E}$ est fini et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathcal{M}_n(\mathcal{E})$. Or, comme $\mathcal{E}$ est fini, $\mathcal{M}_n(\mathcal{E})$ l'est aussi. L'ensemble $\{M^k, k \in \mathbb{N}\}$ est donc une partie d'un ensemble fini : il est fini.

Ceci implique que les M^k ne sont pas tous distincts deux à deux, donc qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 < k_2$ et $M^{k_1} = M^{k_2} = M^{k_1+N} = M^{k_1} M^N$ avec $N = k_2 - k_1 \in \mathbb{N}^*$.

Comme M est inversible, M^{k_1+1} l'est aussi et, en multipliant la relation ci-dessus par $(M^{k_1+1})^{-1}$, on obtient :

$$M^{-1} = (M^{k_1+1})^{-1} M^{k_1} = (M^{k_1+1})^{-1} M^{k_1} M^N = M^{N-1}.$$

Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (les coefficients de M^k sont des entiers naturels).

- Pour $k = 0$, $M^0 = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$: la propriété est vraie.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Avec } M^{k+1} = M^k M, \text{ on a pour tous } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [M^{k+1}]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n [M^k]_{i,\ell} [M]_{\ell,j}.$$

Pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $[M]_{\ell,j} \in \mathbb{N}$ par hypothèse et $[M^k]_{i,\ell} \in \mathbb{N}$ par hypothèse de récurrence. Or, $\mathbb{N}$ est stable par produit et par somme, donc $[M^{k+1}]_{i,j} \in \mathbb{N}$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme $N \in \mathbb{N}^*$, on a $N-1 \in \mathbb{N}$ et donc, $M^{-1} = M^{N-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$, autrement dit :

$$M^{-1} \text{ est à coefficients dans } \mathbb{N}.$$

On a $M^{-1}M = I_n$, donc $\sum_{k=1}^n [M^{-1}]_{i,k} [M]_{k,j} = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme les $[M^{-1}]_{i,k}$ et $[M]_{k,j}$ sont tous des entiers naturels, on prouve comme dans la question **Q25** que chaque colonne et chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1 et $n-1$ coefficients nuls, autrement dit que :

$$M \text{ est une matrice de permutation.}$$

IV Une famille d'éléments de $\mathcal{X}_n$

Q32. On a pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{i,j} = [UU^T]_{i,j} = x_i x_j$ et comme x_i et x_j appartiennent à $\{0,1\}$ qui est stable par produit, on a aussi $x_i x_j \in \{0,1\}$. Ceci prouve que :

$$M \in \mathcal{X}_n$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{i,i} = x_i^2 = x_i$. Donc, $\text{tr}(M) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in \{0,1\}$, ce qui implique que $0 \leq x_i \leq 1$, et les x_i ne sont pas tous nuls, donc $s \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq s \leq n$. Ainsi :

$$\text{tr}(M) \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

On a vu que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{i,i} = x_i$. Or, les x_i ne sont pas tous nuls, donc $M \neq 0_n$ et ainsi, $\underline{rg(M) \geq 1}$.

De plus, si on note $C_1, C_2, \dots, C_n$, on a $C_j = x_j U$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $\text{Im } M \subset \text{Vect}(U)$ et ainsi $\underline{rg(M) \leq 1}$.

Finalement :

$$\boxed{rg(M) = 1}$$

Q33. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $[M]_{j,i} = x_j x_i = x_i x_j = [M]_{i,j} \in \mathbb{R}$, donc, M est symétrique réelle et d'après le théorème spectral :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

On a vu que $rg(M) = 1$, donc d'après le théorème du rang, $\dim(\ker M) = n - 1$ donc 0 est valeur propre de M de multiplicité au moins $n - 1$.

Ceci implique que $\chi_M = X^{n-1}(X - \lambda)$ et $tr(M) = \lambda = s$. Comme $s \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{Sp(M) = \{0, s\}}$$

Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

- $MZ = 0_{n,1}$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n x_i x_j z_j = 0$, soit $x_i \left(\sum_{j=1}^n x_j z_j \right) = 0$ et

comme l'un au moins des x_i n'est pas nul, ceci équivaut à $\sum_{j=1}^n x_j z_j = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\ker M \text{ est l'hyperplan d'équation cartésienne } \sum_{j=1}^n x_j z_j = 0.}$$

- Si $MZ = sZ$, on a (avec $s \neq 0$) $Z = \frac{1}{s} MZ \in \text{Im } M = \text{Vect}(U)$, donc $\ker(M - sI_n)$ est inclus dans la droite $\text{Vect}(U)$ et comme $\ker(M - sI_n)$ n'est pas réduit à 0 :

$$\boxed{\ker(M - sI_n) = \text{Vect}(U)}$$

Q34. On a $M^2 = UU^T UU^T = U(U^T U)U^T$ et $U^T U = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i = s$, donc $M^2 = sUU^T = sM$.

Alors, $M^3 = MM^2 = sM^2 = s^2 M$, $M^4 = MM^3 = s^2 M^2 = s^3 M$, ...

On conjecture que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = s^{k-1}M$. Prouvons-le par récurrence sur k .

- Pour $k = 1$, $M^1 = M = s^0 M$: la propriété est vraie.
- Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, par hypothèse de récurrence, $M^k = s^{k-1}M$ donc :

$$M^{k+1} = M^k M = (s^{k-1}M)M = s^{k-1}M^2 = s^{k-1}(sM) = s^k M.$$

La propriété est donc vraie au rang $k + 1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$M^k = s^{k-1}M$$

Q35. La matrice M est une matrice de projection si et seulement si $M^2 = M$. Or, $M^2 = sM$ et M est non nulle, donc :

$$M \text{ est une matrice de projection si et seulement si } s = 1.$$

Q36. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = s^{k-1}M$, donc, la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la suite $(s^{k-1}M)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge, autrement dit, si et seulement si la suite géométrique $(s^{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge. Or, on a vu dans la question **Q32** que $s = \text{tr}(M) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc la suite $(s^{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne converge que pour $s = 1$.

Dans ce cas, la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, avec $M^k = M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc converge vers M et d'après la question précédente, quand $s = 1$, M est une matrice de projection.

Ainsi :

$$\text{La suite des } M^k \text{ est convergente si et seulement si } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \text{ et dans ce cas, la limite est une matrice de projection.}$$

Q37. On cherche $F = \text{Vect}(M = UU^T, U = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\}))$.

On a vu que toute matrice de la forme $M = UU^T$ est symétrique, donc toute combinaison linéaire de matrice de cette forme est encore symétrique. Ainsi :

$$F \subset S_n(\mathbb{R}).$$

Rappelons que si on note $(E_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$S_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(\left(E_{i,i}\right)_{1 \leq i \leq n} \cup \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1 \leq i < j \leq n}\right).$$

Donc, $S_n(\mathbb{R}) \subset F$ si et seulement si $E_{i,i} \in F$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $E_{i,j} + E_{j,i} \in F$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $U_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}.$

- Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $U_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})$ et :

$$E_{i,i} = U_i U_i^\top \in F.$$

- Pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$, on a $U_i, U_j, U_i + U_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})$ et :

$$E_{i,j} + E_{j,i} = (U_i + U_j)(U_i + U_j)^\top - U_i U_i^\top - U_j U_j^\top \in F.$$

Ainsi, $E_{i,i} \in F$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $E_{i,j} + E_{j,i} \in F$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$, donc $S_n(\mathbb{R}) \subset F$ et finalement :

$$F = \text{Vect}\left(M = UU^\top, U = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})\right) = S_n(\mathbb{R})$$