

DM de Mathématiques n° 4

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres de $\{0,1\}$ (donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ ou 1) et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} \\ 0 & \lambda a_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda a_{n-1} & 0 \\ a_{n+2} & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

- 1) Prouver que A est semblable à la matrice $F = \left(\begin{array}{c|c} E & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \lambda D \end{array} \right)$ avec $E = \begin{pmatrix} a_1 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$ et $D = \text{Diag}(a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n-2}(\{0,1\})$.

On donnera une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, ainsi que P^{-1} , telle que $A = PFP^{-1}$.

- 2) On cherche à calculer les puissances de E .

- a. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

☺ On pourra distinguer les deux cas : $a_{n+1} = a_{n+2}$ et $a_{n+1} \neq a_{n+2}$.

- b. Calculer E^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quand $a_1 = a_n$.

- c. On suppose que $a_1 \neq a_n$ et $a_{n+1}a_{n+2} = 0$. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ et deux réels α et β tels que $E = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Q^{-1}$ (on donnera Q et Q^{-1}).

Calculer alors E^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- d. On suppose que $a_1 \neq a_n$ et $a_{n+1}a_{n+2} \neq 0$.

- i. Justifier que $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- ii. Pour $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver qu'il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$E^k = \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix} \text{ et } u_{k+2} = u_{k+1} + u_k.$$

On exprimera u_k en fonction de k .

- iii. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables et donner une matrice R , ainsi que son inverse, telle que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$. En déduire les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

.../...

- 3) Convient y a-t-il de matrices E possibles. Montrer que l'on a balayé toutes les possibilités dans la question 2.
- 4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel λ et les matrices E et D pour que la série de matrices $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} A^k$ converge. Calculer la somme en cas de convergence.

On considère maintenant une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur un univers probabilisé (Ω, P) , mutuellement indépendantes et suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ (donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X_n = 1) = p$) et pour un entier $n \geq 3$, on appelle M la matrice aléatoire :

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 & X_{n+1} \\ 0 & \lambda X_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda X_{n-1} & 0 \\ X_{n+2} & 0 & \cdots & 0 & X_n \end{pmatrix}.$$

On introduit aussi $U = \begin{pmatrix} X_1 & X_{n+1} \\ X_{n+2} & X_n \end{pmatrix}$, $V = \text{Diag}(X_2, \dots, X_{n-1})$ et $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ quand la série de matrices $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge.

On a admet que M , U , V et S sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$, $\mathcal{M}_2(\{0, 1\})$, $\mathcal{M}_{n-2}(\{0, 1\})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement.

- 5) Déterminer, suivant la valeur de λ , la probabilité $f(\lambda)$ que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge.
- 6) On suppose que $\lambda \in]0, 1]$.
- A l'aide des résultats de la question 4, calculer la probabilité que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge et que sa somme soit inversible.
 - Prouver, sans utiliser les valeurs de S trouvées dans la question 4, que les deux évènements « S est inversible » et « U et V sont inversibles » sont égaux.
 - Quand la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge, calculer la probabilité que S soit inversible.