DS de Mathématiques n° 3

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 4 pages.

Problème 1

– extrait de Centrale-Supélec - 2024 - PSI - Mathématiques 2 –

L'objet de ce problème est d'étudier le comportement de la somme f de la série entière $\sum (\ln n) x^n$ de la variable réelle x aux bornes de son intervalle ouvert de convergence.

Dans ce qui suit, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln n$.

A – *Préliminaires*

Q1. Déterminer un équivalent simple de la différence $a_{n+1} - a_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.

Q2. Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ, puis que :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

Q3. Démontrer que la série entière $\sum (\ln n) x^n$ est de rayon de convergence égal à 1, puis préciser le domaine de définition de la fonction f.

B – *Étude de f en 1*

Q4. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers 1 par valeur inférieure.

Q5. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum H_n x^n$ de la variable réelle x. On notera g sa somme.

Q6. À l'aide des deux séries entières $\sum x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$, montrer que pour tout $x \in \left]-1;1\right[$:

$$g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

Q7. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1[$:

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{M}{1-x}.$$

Q8. En déduire que $f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\sim} g(x)$.

C – *Étude de f en – 1*

On considère la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $c_1 = -1$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$c_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

Q9. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$ de la variable réelle *x*, dont on note alors *h* la somme, est égal à 1, puis préciser le domaine de définition de *h*.

Q10. Montrer que la série numérique $\sum c_n$ converge et que sa somme vaut – γ.

Q11. La fonction *h* est-elle continue en 1 ? en – 1 ?

Q12. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k c_k = \ln\left(\frac{2^{4p}(p!)^4}{2p((2p)!)^2}\right) + \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Q13. On rappelle que la série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente avec $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. Montrer que :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

On pourra au préalable déterminer une relation entre f et h sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Problème 2

– extrait adapté de Centrale-Supélec - 2016 - PSI - Mathématiques 1 –

Dans tout ce problème, *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices *M* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top M = I_n$ où $M^\top$ désigne la transposée de *M*.
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{X}_n$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Dans tout ce qui suit, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera $[M]_{i,j}$ ses coefficients.

On admettra le *théorème spectral* : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On rappelle de plus qu'une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

I Généralités

Q14. Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

On pose $\mathcal{X}_n' = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Q15. Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}_2'$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Q16. Démontrer que $\mathcal{X}_2'$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $Vect\left(\mathcal{X}_2'\right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q17. Est-ce que, pour $n \geq 2$, $\mathcal{X}_n'$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q18. Montrer que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{X}_n'$. A-t-on égalité ?

II Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$

Q19. Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{X}_n$, $\det M \leq n!$ et qu'il n'y jamais égalité (soit $\det M < n!$).

Q20. Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n).

Q21. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

Q22. Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. Calculer $\det M$ et en déduire la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.

III Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique (le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle x, y\rangle$). On rappelle que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, on a $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ dans lui-même (appelées permutations de $[\![1, n]\!]$). Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i, colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon, autrement dit $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ où $\delta_{\ell,k}$ vaut 1 si $\ell = k$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la matrice de permutation associée à σ. On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.

Q23. Justifier que $\mathcal{P}_n$ est fini et déterminer son cardinal.

Q24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,i}[M]_{k,j} = \delta_{i,j}$.

Q25. Démontrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Q26. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

Q27. Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Montrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

Q28. Justifier que, pour $\sigma \in S_n$ donnée, l'application $\begin{cases} \mathbb{Z} \to S_n \\ k \mapsto \sigma^k \end{cases}$ n'est pas injective.

En déduire qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\sigma^N = Id_{[\![1,n]\!]}$, puis que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

Q29. Déterminer tous les vecteurs propres communs à toutes les matrices de $\mathcal{P}_n$.

Q30. On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ quand σ décrit S_n sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D.

a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont bien stables par u_σ pour tout $\sigma \in S_n$.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ.

Démontrer qu'il existe un couple $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $e_k - e_j$ appartient à V. Conclure.

Q31. On se donne une matrice M de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini. Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation.

IV Une famille d'éléments de $\mathcal{X}_n$

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\{0,1\}$ non tous nuls. On pose :

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = UU^{\mathsf{T}}.$$

Q32. Montrer que $M \in \mathcal{X}_n$, $tr(M) \in [\![1,n]\!]$ et que $rg(M) = 1$.

Q33. Prouver que M est diagonalisable. Donner son spectre et ses sous-espaces propres.

Q34. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer M^k en fonction de s et M.

Q35. Montrer que M est une matrice de projection si et seulement si $s = 1$.

Q36. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour que la suite des M^k soit convergente. Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

Q37. Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $M = UU^{\mathsf{T}}$ quand $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrit $\{0,1\}^n$.

- FIN DU SUJET -