Corrigé du DM n° 4

1) Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et appelons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On a alors :

$$\begin{cases} u(e_1) = a_1 e_1 + a_{n+2} e_n \\ u(e_n) = a_{n+1} e_1 + a_n e_n \\ u(e_k) = \lambda a_k e_k, \forall k \in [\![2, n-1]\!] \end{cases}$$

Si on considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_n, e_2, \dots, e_{n-1})$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 & a_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n+2} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda a_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \lambda D \end{array}\right) = F .$$

Ainsi, A et F représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans deux bases différentes, donc :

$$\boxed{A \text{ est semblable à } F.}$$

On a alors $A = PFP^{-1}$ avec :

$$\boxed{P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

<u>Remarque pour les 5/2</u> :

On peut noter que $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$. Or, si $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, les deux bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées, donc $P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ est une matrice de passages entre deux bases orthonormées, elle est donc orthogonale, soit $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$.

2) Remarquons que, comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $a_i = 0$ ou 1, on a $a_i^{\alpha} = a_i$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Tel qu'indiqué, considérons deux cas.

- $\underline{a_{n+1} = a_{n+2}}$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+1} & 0 \end{pmatrix}^k = a_{n+1}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = a_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k .$$

Or, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2p} = I_2$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } a_{n+1} = a_{n+2},\ \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^k = a_{n+1} J_2^k = a_{n+1} \begin{cases} I_2 & \text{quand } k \text{ est pair} \\ J_2 & \text{quand } k \text{ est impair} \end{cases} \text{ avec } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- $\underline{a_{n+1} \neq a_{n+2}}$. Comme $a_{n+1}, a_{n+2} \in \{0,1\}$, on a alors $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et dans les deux cas $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } a_{n+1} \neq a_{n+2},\ \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^k = 0_2 \text{ pour tout } k \geq 2}$$

b. On suppose ici que $a_1 = a_n$, donc $E = \begin{pmatrix} a_1 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_1 \end{pmatrix} = a_1 I_2 + \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère à nouveau deux cas.

- $\underline{a_{n+1} = a_{n+2}}$. On considère plusieurs sous cas.
  - Si $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$, alors $E^k = (a_1 I_2)^k = a_1^k I_2 = a_1 I_2$.
  - Si $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ et $a_1 = 0$, alors $E = J_2$ et $E^k = J_2^k$.
  - Si $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$ et $a_1 = 1$, alors $E = I_2 + J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $E^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{k-1}(I_2 + J_2)$.

  Ainsi, quand $a_1 = a_n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{Si } a_{n+1} = a_{n+2},\ E^k = \begin{cases} a_1 I_2 & \text{quand } a_{n+1} = a_{n+2} = 0 \\ J_2^k = \begin{cases} I_2 & \text{quand } k \text{ est pair} \\ J_2 & \text{quand } k \text{ est impair} \end{cases} & \text{quand } a_{n+1} = a_{n+2} = 1, a_1 = 0 \\ 2^{k-1}(I_2 + J_2) & \text{quand } a_{n+1} = a_{n+2} = 1, a_1 = 1 \end{cases}}$$

- $\underline{a_{n+1} \neq a_{n+2}}$. On a $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^j = 0_2$ pour $j \geq 2$. Comme I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme qui donne alors :

$$\begin{aligned} E^k &= \sum_{j=0}^{1} \binom{k}{j} a_1^{k-j} \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix}^j = a_1^k I_2 + k\, a_1^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & a_{n+1} \\ a_{n+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_1 I_2 + k\, a_1^{k-1}(E - a_1 I_2) = k\, a_1^{k-1} E - (k-1)\, a_1 I_2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\text{Si } a_{n+1} \neq a_{n+2},\ E^k = \begin{cases} E & \text{quand } k = 1 \\ a_1(kE - (k-1) I_2) & \text{quand } k \geq 2 \end{cases}}$$

c. On suppose ici que $a_1 \neq a_n$ et $a_{n+1}a_{n+2} = 0$.

Comme $a_{n+1}a_{n+2} = 0$, on a $a_{n+1} = 0$ ou $a_{n+2} = 0$, et donc $E = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_{n+2} & a_n \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_1 & a_{n+1} \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, $\chi_E = (X - a_1)(X - a_n)$ et comme $a_1 \neq a_n$, χ_E est scindé à racines simples donc E est diagonalisable : il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $\alpha < \beta$ $E = Q\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}Q^{-1}$.

On a :

$$E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + a_{n+1}y = a_1x \\ a_{n+2}x + a_ny = a_1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}y = 0 \\ a_{n+2}x = (a_1 - a_n)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 - a_n \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + a_{n+1}y = a_nx \\ a_{n+2}x + a_ny = a_ny \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}y = (a_n - a_1)x \\ a_{n+2}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n - a_1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre $Q = \begin{pmatrix} a_1 - a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_n - a_1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det Q}\begin{pmatrix} a_n - a_1 & -a_{n+1} \\ -a_{n+2} & a_1 - a_n \end{pmatrix}$ avec $\det Q = -(a_1 - a_n)^2 - a_{n+1}a_{n+2} = -1$, donc $Q^{-1} = Q$.

Ainsi :

$$\boxed{E = Q\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}Q^{-1} \text{ avec } Q^{-1} = Q = \begin{pmatrix} a_1 - a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_n - a_1 \end{pmatrix}.}$$

Alors $E^k = Q\begin{pmatrix} a_1^k & 0 \\ 0 & a_n^k \end{pmatrix}Q^{-1}$. Or, comme $k \geq 2$, $a_1^k = a_1$ et $a_n^k = a_n$. Ainsi, $E^k = Q\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_n \end{pmatrix}Q^{-1}$, soit :

$$\boxed{E^k = E}$$

d. On suppose ici que $a_1 \neq a_n$ et $a_{n+1}a_{n+2} \neq 0$.

i. Comme $a_1, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \in \{0,1\}$:

- si $a_1 \neq a_n$, on a $(a_1, a_n) = (1,0)$ ou $(0,1)$;
- si $a_{n+1}a_{n+2} \neq 0$, on a $a_{n+1} = a_{n+2} = 1$.

Ceci ne laisse que deux possibilités :

$$\boxed{E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

ii. Prouvons la propriété par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $k = 0$, on a $E^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété est validée en en posant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 1 = u_1 + u_0$.

Hérédité : On suppose la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$. On a alors par hypothèse de récurrence :

$$E^{k+1} = E^k E = \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+2}+u_{k+1} & u_{k+2} \\ u_{k+1}+u_k & u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+2}+u_{k+1} & u_{k+2} \\ u_{k+2} & u_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Et en posant $u_{k+3} = u_{k+2} + u_{k+1}$, on obtient bien $E^{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+3} & u_{k+2} \\ u_{k+2} & u_{k+1} \end{pmatrix}$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ainsi, ici :

$$\boxed{\text{Il existe bien une suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ telle que pour tout } k \in \mathbb{N} : \quad E^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix} \text{ et } u_{k+2} = u_{k+1} + u_k .}$$

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double à coefficients constants (la suite de Fibonacci). L'équation caractéristique associée est $x^2 - x - 1 = 0$ dont les racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il existe alors deux réels A et B tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k .$$

Or, on a vu que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + B\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ B = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k .$$

On a $\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc $\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ce qui permet d'écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]}$$

iii. Remarquons que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont semblables, avec } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}R^{-1} \text{ où } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R^{-1}.}$$

On obtient alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = R \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k R^{-1} = R \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix} R$, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} \end{pmatrix}}$$

3) Comme $E \in \mathcal{M}_2(\{0,1\})$, chaque coefficient peut prendre deux valeurs, ce qui donne en tout 2^4 possibilités. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il y a 16 matrices } E \text{ possibles.}}$$

Faisons un tableau récapitulatif.

Question	**Conditions**	**Matrices concernées**	**Nombre de matrices concernées**
2 b (1er cas)	$\begin{cases} a_1 = a_n \\ a_{n+1} = a_{n+2} \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	4
2 b (2nd cas)	$\begin{cases} a_1 = a_n \\ a_{n+1} \neq a_{n+2} \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	4
2 c	$\begin{cases} a_1 \neq a_n \\ a_{n+1}a_{n+2} = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	6
2 d	$\begin{cases} a_1 \neq a_n \\ a_{n+1}a_{n+2} \neq 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	2

On retrouve bien 16 matrices en tout, donc :

$$\boxed{\text{La question 2 balaye bien toutes les possibilités.}}$$

4) Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $D^k = Diag\left(a_2^k, \dots, a_{n-1}^k\right) = Diag\left(a_2, \dots, a_{n-1}\right) = D$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} A^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \left(PFP^{-1}\right)^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} PF^kP^{-1} = P\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} F^k\right] P^{-1}$$

$$= P\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \left(\begin{array}{c|c} E & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \lambda D \end{array}\right)^k\right] P^{-1} = P\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \left(\begin{array}{c|c} E^k & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \lambda^k D^k \end{array}\right)\right] P^{-1}$$

$$= P\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \left(\begin{array}{c|c} E^k & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \lambda^k D \end{array}\right)\right] P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} E^k & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right) D \end{array}\right) P^{-1}$$

Or, l'application $\Phi \mapsto P\Phi P^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par bilinéarité du produit matriciel) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc l'application $\Phi \mapsto P\Phi P^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il en va de même pour $\Phi \mapsto P^{-1}\Phi P = P^{-1}\Phi(P^{-1})^{-1}$.

Ceci permet de conclure que la suite $\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}A^k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la suite $\left(\left(\begin{array}{c|c}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}E^k & 0_{2,n-2}\\ \hline 0_{n-2,2} & \left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right)D\end{array}\right)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge. Et comme une suite de matrices converge si et seulement si elle converge « coefficient par coefficient », on peut conclure que la suite $\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}A^k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si les deux suites $\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}E^k\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right)D\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

Considérons les deux suites.

- La suite $\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right)D\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $D=0_{n-2}$ ou la série numérique $\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}$ converge. Or :
  - si $\lambda>1$, $\left|\frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right|\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty$, donc la série $\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}$ diverge grossièrement ;
  - si $0<\lambda\leq 1$, on , $\left|\frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right|\leq\frac{1}{k^2}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et la série de Riemann $\sum\frac{1}{k^2}$ converge, donc la série $\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}$ converge absolument.

  Ainsi, la série $\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}$ converge si et seulement si $\lambda\in\left]0,1\right]$

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right)D\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ converge si et seulement si } D=0_{n-2} \text{ ou } \lambda\in\left]0,1\right].}$$

Pour $\lambda\in\left]0,1\right[$, $\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k}{k}$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^k}{k}-\frac{\lambda^k}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}-\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}-\lambda\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k}+1=1+\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(1-\lambda)$$

Et pour $\lambda=1$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1.$$

Donc, si $D = 0_{n-2}$ ou $\lambda \in \left]0,1\right]$:

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right) D = h(\lambda) D \text{ avec } h(\lambda) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \ln(1-\lambda) & \text{quand } \lambda \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{quand } \lambda \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}}$$

- Pour étudions la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} E^k\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ suivant la valeur de E, faisons un tableau récapitulatif des résultats de la question 2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E^k}$	$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} E^k$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	E	$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}\right) E$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$	$J_2^k = \begin{cases} I_2 & \text{quand } k \text{ est pair} \\ J_2 & \text{quand } k \text{ est impair} \end{cases}$	$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} J_2^k$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$2^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{2^k}{k(k+1)}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	0_2 (pour $k \geq 2$)	$\frac{1}{2} E$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$k(E - I_2) + I_2$	$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \left(k(E - I_2) + I_2\right)$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}$	$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \begin{pmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} \end{pmatrix}$	$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} \end{pmatrix}$

Avec ce que l'on a vu plus haut, on obtient les résultats de convergence suivants.

- La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ converge avec :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} E^k = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}\right) E = E.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$J_2^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (-1)^k & 1 - (-1)^k \\ 1 - (-1)^k & 1 + (-1)^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(-1)^k}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} J_2^k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$ et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k}-\frac{(-1)^k}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k}+\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\right)=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}+1=1-2\ln 2\,.$$

Donc, la série de matrices $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}J_2^k$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}J_2^k=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\frac{1-2\ln 2}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\ln 2&\ln 2\\\ln 2&1-\ln 2\end{pmatrix}.$$

- La série $\sum_{k\geq 1}\frac{2^k}{k(k+1)}$ diverge, donc la série de matrices $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2}\frac{2^k}{k(k+1)}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ diverge.

- Si $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}E^k=\frac{1}{2}E$ pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, la série de matrices $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}E^k$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{2}E$.

- Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\left(k\left(E-I_2\right)+I_2\right)=\left(\sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k}\right)\left(E-I_2\right)+\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\right)I_2\,.$$

Et, $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}$ converge, mais $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k}$ diverge, et comme $E-I_2\neq 0_2$, la série de matrices $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}\left(k\left(E-I_2\right)+I_2\right)$ diverge.

- Pour $E=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, on a pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\begin{pmatrix}u_{k+2}&u_{k+1}\\u_{k+1}&u_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}u_{k+2}&\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}u_{k+1}\\\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}u_{k+1}&\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{k(k+1)}u_k\end{pmatrix}.$$

Or, $\frac{1}{k(k+1)}u_k\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{1+\sqrt{5}}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ et comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$, la série numérique $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}u_k$ diverge. Ceci implique que les séries de matrices $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}\begin{pmatrix}u_{k+2}&u_{k+1}\\u_{k+1}&u_k\end{pmatrix}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}\begin{pmatrix}u_{k+2}&u_{k+1}\\u_{k+1}&u_k\end{pmatrix}$ divergent.

On peut donc à nouveau résumer les résultats dans un tableau :

$\boldsymbol{E}$	**Nature de** $\sum \frac{1}{k(k+1)} E^k$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} E^k$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	Convergente	E
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1-\ln 2 & \ln 2 \\ \ln 2 & 1-\ln 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{2} E$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	Divergente	-

Ainsi :

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} E^k \text{ converge ssi } E \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement :

> La série $\sum \frac{1}{k(k+1)} A^k$ converge si et seulement si :
>
> $\left(D = 0_{n-2} \text{ ou } \lambda \in \left]0,1\right] \right)$
>
> et $E \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

En cas de convergence, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} A^k = P \left[\left(\begin{array}{c|c} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} E^k & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)} \right) D \end{array} \right) \right] P^{-1}.$$

On peut donc à nouveau résumer les résultats dans un tableau :

$\boldsymbol{E}$	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} A^k$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$P \left[\left(\begin{array}{c\|c} E & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & h(\lambda) D \end{array} \right) \right] P^{-1}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P \left[\left(\begin{array}{c\|c} \begin{pmatrix} 1-\ln 2 & \ln 2 \\ \ln 2 & 1-\ln 2 \end{pmatrix} & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & h(\lambda) D \end{array} \right) \right] P^{-1}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P \left[\left(\begin{array}{c\|c} \frac{1}{2} E & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & h(\lambda) D \end{array} \right) \right] P^{-1}$

avec $h(\lambda) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1-\lambda}{\lambda} \ln(1-\lambda) & \text{quand } \lambda \in \left]0,1\right[\\ 1 & \text{quand } \lambda \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}$.

5) Définissons l'évènement C_M = « la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}M^k$ converge ».

D'après la question 4, pour $\omega\in\Omega$, la série de matrices $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}M(\omega)^k$ converge si et seulement si $\left(V(\omega)=0_{n-2} \text{ ou } \lambda\in\left]0,1\right]\right)$ et $U(\omega)\in\mathcal{U}$ avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}&=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\\&=\mathcal{M}_2(\{0,1\})\setminus\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Il y a donc deux cas.

- Si $\lambda\in\left]0,1\right]$, alors $C_M=(U\in\mathcal{U})$.
- Si $\lambda\in\left]1,+\infty\right[$, alors $C_M=(U\in\mathcal{U})\cap(V=0_{n-2})$.

Comme les variables aléatoires U et V sont des fonctions de $X_1, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$ et $X_2,\dots,X_{n-1}$ respectivement, $\{X_1, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}\}\cap\{X_2,\dots,X_{n-1}\}=\varnothing$ et les X_i sont indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que ces U et V sont indépendantes. Alors :

- Si $\lambda\in\left]0,1\right]$, alors $f(\lambda)=P(C_M)=P(U\in\mathcal{U})$.
- Si $\lambda\in\left]1,+\infty\right[$, alors :

$$f(\lambda)=P(C_M)=P\big((U\in\mathcal{U})\cap(V=0_{n-2})\big)=P(U\in\mathcal{U})P(V=0_{n-2}).$$

Avec l'indépendance des X_i, on a :

$$P(V=0_{n-2})=P(X_2=\dots=X_{n-1}=0)=P(X_2=0)\dots P(X_{n-1}=0)=(1-p)^{n-2}.$$

Et, pour tout $(a,b,c,d)\in\{0,1\}^4$:

$$P\left(U=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=P(X_1=a)\times P(X_n=d)\times P(X_{n+1}=b)\times P(X_{n+2}=c)=p^{\alpha}(1-p)^{4-\alpha}$$

où α est le nombre de 1 dans (a,b,c,d). On a alors :

$$\begin{aligned}P(U\in\mathcal{U})&=1-P\big(U\in\mathcal{M}_2(\{0,1\})\setminus\mathcal{U}\big)=1-P\left(U\in\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}\right)\\&=1-\left[P\left(U=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)+P\left(U=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)+P\left(U=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right)+P\left(U=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right)+P\left(U=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)\right]\\&=1-p^4-4p^3(1-p)=(1+2p+3p^2)(1-p)^2\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{f(\lambda)=\begin{cases}(1+2p+3p^2)(1-p)^2 & \text{qaund } \lambda\in\left]0,1\right]\\(1+2p+3p^2)(1-p)^n & \text{qaund } \lambda\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}}$$

6) a. On cherche la probabilité de l'évènement « S est inversible », donc celle de l'évènement $(\det S \neq 0)$. Cet évènement n'a bien entendu de sens seulement si S existe, donc seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge. Dans ce qui suit, on suppose que cet évènement est réalisé.

Dans ce cas, on pose $Z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} U^k$. D'après la question précédente, Z existe bien et est une variable aléatoire (fonction de U). On a alors :

$$S = P\left[\left(\begin{array}{c|c} Z & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right) V \end{array}\right)\right] P^{-1}.$$

Et :

$$\det S = \det\left(\begin{array}{c|c} Z & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right) V \end{array}\right) = \det Z \times \det\left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right) V\right) = \det Z \times \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)}\right)^{n-2} \det V.$$

Avec $\lambda \in]0,1]$, la série $\sum \frac{\lambda^k}{k(k+1)}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k(k+1)} \neq 0$, d'où pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\det(S(\omega)) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(Z(\omega)) \neq 0 \text{ et } \det(V(\omega)) \neq 0.$$

Autrement dit :

$$(\det S \neq 0) = (\det Z \neq 0) \cap (\det V \neq 0).$$

Remarquons que $\det Z$ et $\det V$ sont des variables aléatoires, dépendant uniquement de U et V qui sont indépendantes (question précédente). D'après le lemme des coalitions, $\det Z$ et $\det V$ sont elles-mêmes indépendantes. Alors :

$$P(\det S \neq 0) = P(\det Z \neq 0) \times P(\det V \neq 0).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a calculé plus haut les sommes possibles de $\sum \frac{1}{k(k+1)} U(\omega)^k$.

- Si $U(\omega) \in \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, alors $Z(\omega) = U(\omega)$.

  Or, la seule matrice inversible de l'ensemble ci-dessus est I_2 et dans ce cas, $\det Z(\omega) \neq 0$ si et seulement si $U(\omega) = I_2$.

- Si $U(\omega) = J_2$, $Z(\omega) = \begin{pmatrix} 1-\ln 2 & \ln 2 \\ \ln 2 & 1-\ln 2 \end{pmatrix}$ et $\det Z(\omega) \neq 0$.

- Si $U(\omega) \in \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, $Z(\omega) = \frac{1}{2} U(\omega)$ et $\det(Z(\omega)) = \frac{1}{4} \det(U(\omega)) = 0$ car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

Ainsi :

$$P(\det Z \neq 0) = P(U = I_2) + P(U = J_2) = 2p^2(1-p)^2.$$

Par ailleurs, $\det V = \det\left(Diag\left(X_2, \dots, X_{n-1}\right)\right) = X_2 \times \dots \times X_{n-1}$, donc avec l'indépendance des X_i :

$$P\left(\det V \neq 0\right) = P\left(X_2 \times \dots \times X_{n-1} \neq 0\right) = P\left(X_2 \neq 0, \dots, X_{n-1} \neq 0\right)$$
$$= P\left(X_2 \neq 0\right) \times \dots \times P\left(X_{n-1} \neq 0\right) = P\left(X_2 = 1\right) \times \dots \times P\left(X_{n-1} = 1\right) = p^{n-2}$$

Finalement, la probabilité que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge avec une somme inversible est :

$$\boxed{P\left(\det S \neq 0\right) = 2p^n (1-p)^2}$$

b. On a vu dans la question précédente que $\left(\det S \neq 0\right) = \left(\det Z \neq 0\right) \cap \left(\det V \neq 0\right)$. Donc :

« S est inversible » = « Z et V sont inversibles ».

Or, pour tout $\omega \in \Omega$, la série de matrices $\sum \frac{1}{k(k+1)} U(\omega)^k$ converge si et seulement si :

$$U(\omega) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hormis $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$, toutes les matrices de l'ensemble ci-dessus sont triangulaires avec 0 ou 1 sur la diagonale, donc $Z(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} U(\omega)^k$ sera triangulaire aussi, avec le mêmes coefficients diagonaux que $U(\omega)$ (car $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{0}{k(k+1)} = 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$). Ainsi, 0 est valeur propre de $Z(\omega)$ si et seulement si 0 est valeur propre de $U(\omega)$.

Pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2 = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc quand $U(\omega) = J_2$ qui est inversible, on a $Z(\omega) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec $a = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \neq 0$, qui est inversible.

Finalement, dans tous les cas, $Z(\omega)$ est inversible si et seulement si $U(\omega)$ l'est et donc :

$$\boxed{\text{« } S \text{ est inversible » = « } U \text{ et } V \text{ sont inversibles ».}}$$

c. Si on appelle C l'évènement « $\sum \frac{1}{k(k+1)} M^k$ converge » , on cherche ici :

$$P_C\left(\det S \neq 0\right) = \frac{P\left(C \cap \left(\det S \neq 0\right)\right)}{P\left(C\right)} = \frac{P\left(\det S \neq 0\right)}{P\left(C\right)}.$$

D'après la question 5, on a $P\left(C\right) = (1 + 2p + 3p^2)(1-p)^2$ (avec $\lambda \in \left]0,1\right]$) et d'après la question a, on a $P\left(\det S \neq 0\right) = 2p^n (1-p)^2$, donc :

$$\boxed{P_C\left(\det S \neq 0\right) = \frac{2p^n}{1 + 2p + 3p^2}}$$