Corrigé du DS de Mathématiques n° 4

Problème 1

Q1. Les fonctions f et g_s sont polynomiales donc :

$$\boxed{f \text{ et } g_s \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } U_n.}$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i \neq 0$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} x_k = \frac{f(x)}{x_i}$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial x_i}(x) = 1$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{grad}\, f(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{x_1}, \dots, \dfrac{1}{x_n}\right) \\ \overrightarrow{grad}\, g_s(x) = (1, \dots, 1)\end{array}}$$

Q2. Comme f et g_s sont polynomiales sur $\mathbb{R}^n$, elle sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

La continuité de g_s implique entre autres que $g_s^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et comme $\overline{U_n}$ est fermé aussi, $X_s = \{x \in \overline{U_n} \setminus g_s(x) = 0\} = \overline{U_n} \cap g_s^{-1}(\{0\})$ est fermé.

De plus, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $0 \leq x_i \leq \sum_{k=1}^{n} x_k = s$, donc X_s est inclus dans $[0, s]^n$, qui est borné, donc X_s est borné.

Ainsi, f est une fonction continue sur X_s qui est fermé et borné, donc d'après le théorème des bornes atteintes :

$$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } X_s \text{ admet un maximum sur } X_s.}$$

Posons $x_0 = \left(\dfrac{s}{n}, \dots, \dfrac{s}{n}\right) \in \mathbb{R}^n$. Comme $s > 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{s}{n} = s$, on a $x_0 \in X_s \cap U_n \subset X_s$.

On a $f(x_0) \le \max\limits_{x \in X_s} f(x)$ et $f(x_0) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{s}{n} = \left(\frac{s}{n}\right)^n > 0$, donc :

$$\max_{x \in X_s} f(x) > 0.$$

Or, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s \setminus U_n \subset \overline{U_n} \setminus U_n = (\mathbb{R}_+)^n \setminus (\mathbb{R}_+^*)^n$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_0 = 0$ et donc :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k = 0 < \max_{x \in X_s} f(x).$$

Ainsi, le maximum de la restriction de *f* à X_s n'est pas atteint sur $X_s \setminus U_n$ et donc :

$$\boxed{\text{Le maximum de la restriction de } f \text{ à } X_s \text{ atteint sur } X_s \cap U_n \text{ (et jamais sur } X_s \setminus U_n\text{).}}$$

Q3. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n$, on a $x_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k = s - x_n < s$.

En notant $Z_s = \left\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U_{n-1} \setminus \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k < s\right\}$, on a alors :

$$(x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in Z_s.$$

Donc :

$$\max_{(x_1, \dots, x_n) \in X_s} f(x_1, \dots, x_n) = \max_{(x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n} f(x_1, \dots, x_n) = \max_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in Z_s} f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, s - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right).$$

Or $Z_s = U_{n-1} \cap \left\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k < s\right\}$ est une intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$, donc est un ouvert. Comme *f* est de classe C^1 sur U_n et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto s - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k$ l'est aussi, la fonction $h : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, s - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right)$ est de de classe C^1 sur $Z_s \subset U_{n-1}$ comme composée de fonctions de classe C^1. Alors, le maximum de cette fonction *h* sur l'ouvert Z_s est atteint en un point critique, donc $(a_1, \dots, a_{n-1})$ est un point critique de *h*.

Or, pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in Z_s$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, s - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) - \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, s - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right).$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \iff \frac{f(a)}{a_k} = \frac{f(a)}{a_n} \iff a_k = a_n.$$

En posant $\lambda = \dfrac{f(a)}{a_n} > 0$, on a alors :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } [\![1, n]\!],\ a_k = \frac{f(a)}{\lambda}.}$$

Q4. D'après la question précédente :

$$f(a) = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(a)}{\lambda} = \left(\frac{f(a)}{\lambda}\right)^n.$$

Et comme $a = (a_1, \dots, a_n) \in X_s \cap U_n$, on a :

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(a)}{\lambda} = n\frac{f(a)}{\lambda}.$$

Ainsi :

$$f(a) = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(a)}{\lambda} = \left(\frac{s}{n}\right)^n.$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n$, on a $\sum_{k=1}^{n} x_k = s$ et :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \le f(a) = \left(\frac{s}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n.$$

En prenant la puissance $1/n$, on obtient pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n$:

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

Soit maintenant $(x_1, \dots, x_n) \in U_n = (\mathbb{R}_+^*)^n$. En posant $s = \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$, on a $(x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n$ et donc $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Enfin, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \setminus (\mathbb{R}_+^*)^n$, l'un des x_k est nul, et donc $\prod_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Comme $\sum_{k=1}^{n} x_k \ge 0$, on a encore $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Finalement, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$:

$$\boxed{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

II – Démonstration de l'inégalité de Carleman

Q5. Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in U_n$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $x_i\neq 0$ et $F_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}(x_1x_2\dots x_k)^{1/k}$, donc :

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_i}(x)=\sum_{k=i}^{n}(x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_k)^{\frac{1}{k}}\frac{1}{k}(x_i)^{\frac{1}{k}-1}=\frac{1}{x_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}(x_1x_2\dots x_k)^{1/k}.$$

Avec $h_n(x_1,\dots,x_n)=x_1+x_2+\dots+x_n-1$, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\frac{\partial h_n}{\partial x_i}(x)=1$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{grad}\ f(x)=\left(\frac{1}{x_1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(x_1x_2\dots x_k)^{1/k},\dots,\frac{1}{x_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k}(x_1x_2\dots x_k)^{1/k},\dots,\frac{1}{x_n}\frac{1}{n}(x_1x_2\dots x_k)^{1/n}\right)\\ \overrightarrow{grad}\ g_s(x)=(1,\dots,1)\end{array}}$$

Q6. Les fonctions F_n et h_n sont de classe C^1 sur U_n, donc continues sur U_n, et même sur $\mathbb{R}^n$ pour h_n. Comme dans la question **Q2**, on prouve alors que $\overline{U_n}\cap H_n=\overline{U_n}\cap h_n^{-1}(\{0\})$ est fermé.

De plus, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\overline{U_n}\cap H_n$, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $0\leq x_i\leq\sum_{k=1}^{n}x_k=1$, donc $\overline{U_n}\cap H_n$ est inclus dans $[0,1]^n$, qui est borné, donc $\overline{U_n}\cap H_n$ est borné.

Ainsi, F_n est une fonction continue sur le fermé, borné $\overline{U_n}\cap H_n$, donc d'après le théorème des bornes atteintes :

$$\boxed{\text{La restriction de } F_n \text{ à } \overline{U_n}\cap H_n \text{ admet un maximum sur } \overline{U_n}\cap H_n.}$$

Q7. On procède manière similaire à la question **Q3**.

Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in U_n\cap H_n$, on a $x_k>0$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ et $\sum_{k=1}^{n-1}x_k=1-x_n<1$.

En notant $Y_n=\left\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in U_{n-1}\setminus\sum_{k=1}^{n-1}x_k<1\right\}$, on a alors :

$$(x_1,\dots,x_n)\in U_n\cap H_n\quad\Leftrightarrow\quad(x_1,\dots,x_{n-1})\in Y_n.$$

Et :

$$\max_{(x_1,\dots,x_n)\in U_n\cap H_n}F_n(x_1,\dots,x_n)=\max_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in Y_n}F_n\left(x_1,\dots,x_{n-1},1-\sum_{k=1}^{n-1}x_k\right).$$

Or, $Y_n = U_{n-1} \cap \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \sum_{k=1}^{n-1} x_k < 1 \right\}$ est une intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^{n-1}$, donc est un ouvert. Comme F_n est de classe C^1 sur U_n et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ l'est aussi, la fonction $\Psi : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto F_n\left(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)$ est de de classe C^1 sur $Y_n \subset U_{n-1}$ comme composée de fonctions de classe C^1. Alors, le maximum de cette fonction Ψ sur l'ouvert Y_n est atteint en un point critique, donc $(a_1, \dots, a_{n-1})$ est un point critique de Ψ.

Or, pour tout $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in Y_n$ et tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\partial F_n}{\partial x_k}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right) - \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \right).$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0 \iff \frac{\partial F_n}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(a) \iff \frac{1}{a_k} \sum_{j=k}^{n} \frac{\gamma_j}{j} = \frac{1}{a_n} \frac{\gamma_n}{n}.$$

En posant $\lambda = \frac{1}{a_n} \frac{\gamma_n}{n} = \frac{(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}}{n\, a_n} > 0$, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\gamma_k}{k} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_k$.

En rappelant que $(a_1, \dots, a_n) \in H_n$, on a $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, on obtient bien :

$$\boxed{\begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \qquad \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}}$$

Q8. a) On a d'une part :

$$\lambda = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{\gamma_j}{j} \right) = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{\gamma_j}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j} \frac{\gamma_j}{j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(j \frac{\gamma_j}{j} \right) = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n.$$

Et d'autre part :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} = F_n(a_1, \dots, a_n) = M_n.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = M_n}$$

b) Comme $\lambda > 0$ et $a_k > 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\lambda a_k \neq 0$ et on peut poser $\omega_k = \dfrac{\gamma_k}{\lambda a_k}$.

Alors, $\omega_n = \dfrac{\gamma_n}{\lambda a_n} = \dfrac{\gamma_n}{\dfrac{1}{a_n}\dfrac{\gamma_n}{n}a_n} = n$ et pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma_k}{k} + \dfrac{\gamma_{k+1}}{k+1} + \ldots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_k \\ \qquad \dfrac{\gamma_{k+1}}{k+1} + \ldots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_{k+1} \end{cases}$$

Donc :

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{k}{\lambda a_k}\left(\lambda a_k - \lambda a_{k+1}\right) = \frac{k}{\lambda a_k}\frac{\gamma_k}{k} = \omega_k .$$

Ainsi, avec pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\omega_k = \dfrac{\gamma_k}{\lambda a_k}$, soit $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$, on a bien :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_k = k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) \text{ si } k \in [\![1,n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}}$$

Q9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ln\left[\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}\right] = (k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right).$$

Par concavité de la fonction ln, on a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k+1}\right) \leq \dfrac{1}{k+1}$ et, avec la croissance de la fonction exponentielle, on peut écrire :

$$\ln\left[\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}\right] \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \leq e .$$

Comme $\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} > 0$, on obtient en passant aux inverses :

$$\boxed{\frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}}$$

Q10. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. On a $a_k - a_{k+1} = \dfrac{\gamma_k}{\lambda k} = \dfrac{1}{\lambda k}\left(a_1 a_2 \ldots a_k\right)^{1/k}$ et :

$$\omega_k = k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k\,\frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\left(a_1 a_2 \ldots a_k\right)^{1/k}}{a_k} .$$

Donc, avec $\omega_k = \dfrac{\gamma_k}{\lambda a_k} \neq 0$, on a :

$$\frac{\omega_{k+1}^{k+1}}{\omega_k^k} = \frac{\dfrac{1}{\lambda^{k+1}} \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}}{\dfrac{1}{\lambda^k} \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_k}{a_k^k}} = \frac{1}{\lambda} \frac{a_k^k}{a_{k+1}^k} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^{-k} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\underline{\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}.}$$

Par ailleurs :

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\gamma_1}{a_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{(a_1)^{1/1}}{a_1} = \frac{1}{\lambda}.$$

Or, si $\lambda > e$, on a $\dfrac{1}{\lambda} \leq \dfrac{1}{e}$, donc :

$$\boxed{\omega_1 \leq \frac{1}{e}}$$

Prouvons alors par récurrence sur k que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\omega_k \leq \dfrac{k}{k+1}$.

Initialisation : Pour $k = 1$, on vient de voir que $\omega_1 \leq \dfrac{1}{e}$. Or $e > 2$, donc $\omega_1 \leq \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$.

La propriété est vraie au rang $k = 1$.

Hérédité : On suppose la propriété vraie à un rang $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Avec la relation que l'on vient d'établir, on obtient avec l'hypothèse de récurrence et la croissance de $x \mapsto x^k\left(1 - \dfrac{x}{k}\right)^{-k}$ sur $[0, 1]$:

$$\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\left(1 - \frac{1}{k}\frac{k}{k+1}\right)^{-k} = \frac{1}{\lambda}.$$

Or, $\dfrac{1}{\lambda} \leq \dfrac{1}{e} \leq \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$ et ainsi :

$$\omega_{k+1}^{k+1} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{(k+1)+1}\right)^{k+1}.$$

Ceci donne $\omega_{k+1} \leq \dfrac{k+1}{(k+1)+1}$ et la propriété est vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit :

$$\boxed{\omega_k \leq \frac{k}{k+1}}$$

Q11. On vient de prouver que si $\lambda > e$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\omega_k \leq \dfrac{k}{k+1}$ et en particulier, pour $k = n$, on obtient $\omega_n \leq \dfrac{n}{n+1} < 1$. Or, $\omega_n = n \geq 1$, donc :

$$\boxed{\lambda > e \text{ est absurde, donc } \lambda \leq e.}$$

On a vu dans la question **Q8** que $\lambda = M_n$. Alors, d'après le résultat ci-dessus, on peut écrire pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in U_n \cap H_n$, soit pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 1$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \dots x_k)^{1/k} \leq M_n \leq e.$$

Ceci reste vrai pour $n = 1$ (car pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{1} (x_1 x_2 \dots x_k)^{1/k} = x_1 = 1 \leq e$) et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 1$, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \dots x_k)^{1/k} \leq e}$$

Q12. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_k$ converge.

D'après ce que l'on vient de voir, si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s = a_1 + \dots + a_n > 0$ et on peut poser pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = \dfrac{a_k}{s}$. On a alors $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $x_1 + \dots + x_n = 1$.

On peut donc utiliser le résultat précédent, $\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \dots x_k)^{1/k} \leq e$, qui se récrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_1}{s} \frac{a_2}{s} \dots \frac{a_k}{s} \right)^{1/k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{s^k} a_1 a_2 \dots a_k \right)^{1/k} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \leq e.$$

Et comme $s > 0$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < \sum_{k=1}^{n} (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^{k} a_k.$$

Comme la série $\sum a_k$ converge, la série $\sum (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k}$ converge par comparaison de séries positives et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient l'inégalité recherchée.

En définitive :

$$\boxed{\text{La série } \sum (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.}$$

Problème 2

Question préliminaire

Q13. a. L'application $N : M \mapsto \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right|$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (le maximum de n nombres positifs existe toujours et est positif).

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- $$N(\lambda M) = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda[M]_{i,j}\right| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\lambda|\left|[M]_{i,j}\right|$$
  $$= \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left(|\lambda| \sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right| \right) = |\lambda| \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right| \right) = |\lambda| N(M)$$
  Donc N vérifie l'homogénéité.

- On a $N(M) = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right| = 0$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right| = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, ce qui équivaut à $\left|[M]_{i,j}\right| = 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ car tous les termes de chaque somme $\sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right| = 0$ sont positifs. Ainsi, $N(M) = 0$ si et seulement si $[M]_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, soit $M = 0_n$ et donc N vérifie la séparation.

- On a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\left|[M+N]_{i,j}\right| = \left|[M]_{i,j} + [N]_{i,j}\right| \le \left|[M]_{i,j}\right| + \left|[N]_{i,j}\right|$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
  $$\sum_{j=1}^{n} \left|[M+N]_{i,j}\right| \le \sum_{j=1}^{n} \left|[M]_{i,j}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|[N]_{i,j}\right| \le N(M) + N(N).$$
  Ainsi, toutes les sommes $\sum_{j=1}^{n} \left|[M+N]_{i,j}\right|$ sont inférieurs à $N(M)+N(N)$, y compris la plus grande, soit $N(M+N) \le N(M)+N(N)$. Donc N vérifie l'inégalité triangulaire.

On peut alors conclure que :

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

b. On a $I_n = \left(\delta_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} \left|[I_n]_{i,j}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|\delta_{i,j}\right| = 1$ et ainsi :

$$\boxed{\|I_n\| = 1}$$

c. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|[AB]_{i,j}\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,j}\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|[A]_{i,k}[B]_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|[A]_{i,k}\right|\left|[B]_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(\left|[A]_{i,k}\right|\sum_{j=1}^{n}\left|[B]_{k,j}\right|\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}\left|[B]_{k,j}\right| \leq \|B\|$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n}\left|[AB]_{i,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\left|[A]_{i,k}\right|\|B\|\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\left|[A]_{i,k}\right|\right)\|B\|.$$

Et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n}\left|[A]_{i,k}\right| \leq \|A\|$, d'où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}\left|[AB]_{i,j}\right| \leq \|A\|.\|B\|$ et ainsi :

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|}$$

d. Prouvons l'inégalité demandée par récurrence sur *k*.

Initialisation : Pour $k = 0$, on a vu dans la question b que $\|I_n\| = 1$, donc :

$$\left\|A^0\right\| = \|I_n\| = 1 = \|A\|^0.$$

L'inégalité est vraie au rang $k = 0$ (c'est même une égalité).

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$ .On a alors :

$$\begin{aligned}\left\|A^{k+1}\right\| = \left\|A^k A\right\| &\leq \|A\|^k \|A\| \qquad \text{(d'après la question c)}\\ &\leq \|A\|^k \|A\| \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

Ainsi, $\left\|A^{k+1}\right\| \leq \|A\|^{k+1}$ et l'inégalité est donc vraie au rang $k+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k}$$

Q14. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a avec $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la bilinéarité du produit matriciel :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}B^k = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^k\right)P.$$

Or, à nouveau par bilinéarité du produit matriciel, l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ainsi :

$$e^B = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}B^k = P^{-1}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^k\right)P = P^{-1}e^AP.$$

On a donc bien :

$$\boxed{e^B = P^{-1}e^AP}$$

Q15. Le matrices A et B commutent, donc A commute avec $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k$ qui est un polynôme en B pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit :

$$A\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) A .$$

Or, par bilinéarité du produit matriciel, les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc elle sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ainsi :

$$A\left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) = \lim_{N \to +\infty} \left[A\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right)\right] = \lim_{N \to +\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) A\right] = \left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) A .$$

Autrement dit, $Ae^B = e^B A$ et donc :

$$\boxed{A \text{ et } e^B \text{ commutent.}}$$

En appliquant ce résultat à $A' = e^B$ et $B' = A$, qui commutent, on obtient que A' et $e^{B'}$ commutent, autrement dit :

$$\boxed{e^B \text{ et } e^A \text{ commutent.}}$$

Q16. Avec l'inégalité triangulaire et la question **Q13** d, on peut écrire pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left\|\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|} .$$

Comme $M \mapsto \|M\|$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a en passant à la limite quand $N \to +\infty$:

$$\lim_{N \to +\infty} \left\|\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right\| = \left\|\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right\| = \left\|e^A\right\| .$$

D'où avec l'inégalité précédente :

$$\boxed{\left\|e^A\right\| \leq e^{\|A\|}}$$

Q17. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 0 & \lambda_2 & & (*) & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. D'après la question **Q14**, on a alors $e^T = P^{-1} e^A P$ et donc :

$$\det(e^A) = \det(P^{-1} e^A P) = \det(e^T) .$$

Or, avec le résultat sur les puissances de T admis dans l'énoncé, on a :

$$e^T = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} T^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (*') \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & & & \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\lambda_2^k & (**) & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ 0 & e^{\lambda_2} & (**) & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\det(e^A) = \det(e^T) = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

Et comme $tr\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, obtient bien :

$$\boxed{\det(e^A) = e^{tr\,(A)}}$$

Quelle que soit $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, donc $\det(e^A) = e^{tr\,(A)} \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{e^A \text{ est inversible.}}$$

II – Le système linéaire $X' = AX$

II – A. Étude d'un exemple

Q18. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $A - I_3$ possède deux colonnes identiques et non nulles et une colonne nulle, ce qui permet d'affirmer que :

$$\boxed{rg\,(A - I_3) = 1}$$

On a $(A - I_3)v_1 = 0$ et $(A - I_3)v_2 = 0$, donc $Vect(v_1, v_2) \subset \ker(A - I_3)$.

Or, les deux vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc $\dim Vect(v_1, v_2) = 2$

Enfin, avec le théorème du rang, on a :

$$\dim \ker(A - I_3) = 3 - rg\,(A - I_3) = 2 = \dim Vect(v_1, v_2).$$

On a donc $Vect(v_1, v_2) = \ker(A - I_3)$ et la famille (v_1, v_2) est libre, donc :

$$\boxed{\text{Les deux vecteurs } v_1 \text{ et } v_2 \text{ forment une base de } \ker(A - I_3).}$$

Q19. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$(A+I_3)X=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\\x+y+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x-y=0\\-x+y=0\\x+y+2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=x\\z=-x\end{cases}$$

Ainsi :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A+I_3)\iff X=x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\iff X\in Vect(v_3)\text{ avec } v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker(A+I_3)\text{ est une droite dirigée par } v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.}$$

Q20. Les sous-espaces $\ker(A-I_3)$ et $\ker(A+I_3)$ de $\mathbb{R}^3$ n'étant pas réduits à $\{0\}$, ce sont des sous-espaces propres de *A*. Ils sont en somme directe et d'après ce que l'on vient de voir, on a :

$$\dim\ker(A-I_3)+\dim\ker(A+I_3)=2+1=3=\dim\mathbb{R}^3.$$

On a donc $\ker(A-I_3)\oplus\ker(A+I_3)=\mathbb{R}^3$ et la réunion des bases (v_1,v_2) et (v_3) de $\ker(A-I_3)$ et $\ker(A+I_3)$ respectivement forme une base de $\mathbb{R}^3$, autrement dit :

$$\boxed{(v_1,v_2,v_3)\text{ est une base de }\mathbb{R}^3.}$$

Q21. D'après ce qui précède $Sp(A)=\{-1,1\}$, $\ker(A-I_3)=Vect(v_1,v_2)$ et $\ker(A+I_3)=Vect(v_3)$, donc on peut écrire :

$$\boxed{A=PDP^{-1}\text{ avec } D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\text{ et } P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.}$$

Q22. Soit $t\mapsto X(t)=(x(t),y(t),z(t))$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Posons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $Z(t)=P^{-1}X(t)=(a(t),b(t),c(t))$. Comme P est constante, les coordonnées de Z sont des combinaisons linéaires de celles de *X*, donc sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec de plus, $Z'=P^{-1}X'$.

On a alors avec $P^{-1}AP=D$:

$$X'=AX\iff Z'=P^{-1}X'=P^{-1}AX=P^{-1}APP^{-1}X=DZ.$$

Ceci s'écrit pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a'(t) = a(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = -c(t) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a(t) = \alpha e^t \\ b(t) = \beta e^t \\ c(t) = \gamma e^{-t} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $t \mapsto X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ est solution de $X' = AX$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe trois réels α, β, γ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^t \\ \gamma e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha e^t + \gamma e^{-t} \\ \alpha e^t + \gamma e^{-t} \\ \beta e^t - \gamma e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } X' = AX \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } t \mapsto \begin{pmatrix} -\alpha e^t + \gamma e^{-t} \\ \alpha e^t + \gamma e^{-t} \\ \beta e^t - \gamma e^{-t} \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.}$$

Q23. D'après ce qui précède, si X est solution de $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = PZ(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^t \\ \gamma e^{-t} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Et $X(0) = PZ(0) = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, donc :

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0).$$

Or, d'après la question **Q14** et avec $A = PDP^{-1}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tA} = Pe^{tD} P^{-1}.$$

Enfin :

$$e^{tD} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (tD)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (-t)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $X(t)=Pe^{tD}P^{-1}X(0)$, soit :

$$\boxed{X(t)=e^{tA}X(0)}$$

II* – B. *Cas général

Q24. Pour tout $t\in\mathbb{R}$ et pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $[f_A(t)]_{i,j}=[e^{tA}]_{i,j}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[A^k]_{i,j}}{k!}t^k$ et la série entière $\sum\frac{[A^k]_{i,j}}{k!}t^k$ admet l'infini pour rayon de convergence. Sa somme est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$t\mapsto\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[A^k]_{i,j}}{k!}kt^{k-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[A^k]_{i,j}}{(k-1)!}t^{k-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[A^{k+1}]_{i,j}}{k!}t^k\ .$$

Ainsi :

$$\boxed{f_A \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

On a de plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_A\,'(t)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[A^{k+1}]_{i,j}}{k!}t^k\right)_{1\le i,j\le n}$.

Par ailleurs, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $Ae^{tA}=\left(\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[e^{tA}]_{\ell,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ et, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[e^{tA}]_{\ell,j}&=\sum_{\ell=1}^{n}\left([A]_{i,\ell}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[A^k]_{\ell,j}}{k!}t^k\right)=\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[A]_{i,\ell}[A^k]_{\ell,j}}{k!}t^k\right)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{[A]_{i,\ell}[A^k]_{\ell,j}}{k!}t^k\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i,\ell}[A^k]_{\ell,j}\right)\frac{t^k}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}[AA^k]_{i,j}\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}[A^{k+1}]_{i,j}\frac{t^k}{k!}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $f_A\,'(t)=Ae^{tA}$.

Enfin, d'après la question **Q15**, comme A et tA commutent, A et e^{tA} commutent, et finalement on a bien pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{f_A\,'(t)=Ae^{tA}=e^{tA}A}$$

Q25. On appelle $S_{(S)}$ l'ensemble des solutions de $(S): X'=AX$.

On a $S_{(S)}\subset\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right)^{\mathbb{R}}$ et la fonction nulle $t\mapsto 0_{n,1}$ est solution de (S), donc $S_{(S)}$ n'est pas vide.

Pour tous $X_1, X_2 \in S_{(S)}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $X_1 + \lambda X_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car X_1 et X_2 le sont par hypothèse) et :

$$(X_1 + \lambda X_2)' = X_1' + \lambda X_2' = AX_1 + \lambda AX_2 = A(X_1 + \lambda X_2).$$

Donc, $X_1 + \lambda X_2 \in S_{(S)}$ et ainsi, $S_{(S)}$ est stable par combinaison linéaire et finalement, $S_{(S)}$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right)^{\mathbb{R}}$, donc :

$$\boxed{S_{(S)} \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel.}}$$

Q26. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i = f_A E_i$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f_A l'est et E_i est constant, avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_i'(t) = f_A'(t)\, E_i$. Avec le résultat de la question **Q24**, on obtient :

$$X_i'(t) = Ae^{tA} E_i = AX_i(t).$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \in S_{(S)}$, donc :

$$\underline{Vect\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) \subset S_{(S)}}.$$

Soit maintenant $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n = 0$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_n X_n(t) &= \alpha_1 e^{tA} E_1 + \alpha_2 e^{tA} E_2 + \dots + \alpha_n e^{tA} E_n \\ &= e^{tA}\left(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n\right) = 0 \end{aligned}$$

Or, d'après la question **Q17**, e^{tA} est inversible, donc :

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n = 0.$$

Et comme la famille $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est une base, elle est libre, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ceci prouve que :

$$\underline{\dim Vect\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) = n = \dim S_{(S)}}.$$

Finalement, $Vect\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right) = S_{(S)}$ et comme $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est libre :

$$\boxed{\text{La famille } (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est une base de } S_{(S)}.}$$

Q27. Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et X une éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$.

On a alors $X \in S_{(S)} = Vect\left(X_1, X_2, \dots, X_n\right)$, donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \dots + \alpha_n X_n(t) = e^{tA}\left(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots + \alpha_n E_n\right).$$

Alors :

$$X(0)=e^{0_n}\left(\alpha_1E_1+\alpha_2E_2+\ldots+\alpha_nE_n\right).$$

Or :

$$e^{0_n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}0_n^k=\frac{1}{0!}0_n^0=I_n.$$

Ainsi, $X(0)=\alpha_1E_1+\alpha_2E_2+\ldots+\alpha_nE_n=X_0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$X(t)=e^{tA}X_0.$$

Or, $t\mapsto e^{tA}X_0\in Vect\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)=S_{(S)}$, donc $t\mapsto e^{tA}X_0$ est bien solution de (S) (et on a bien $e^{0A}X_0=X_0$). Ainsi, pour tout $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

$$\boxed{\text{Le problème de Cauchy } \begin{cases}X'=AX\\ X(0)=X_0\end{cases} \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}\text{, qui est } t\mapsto e^{tA}X_0.}$$

Q28. On a $g=f_{A+B}f_{-B}$ et les fonctions f_{A+B} et f_{-B} sont dérivables sur $\mathbb{R}$, d'après **Q24**. Ainsi, *g* est un produit (matriciel) de deux fonctions dérivables, donc d'après le résultat rappelé dans cette partie, *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'=f_{A+B}'f_{-B}+f_{A+B}f_{-B}'$.

La question **Q24** a aussi établi que pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f_M'=Mf_M$, donc :

$$g'=(A+B)f_{A+B}f_{-B}+f_{A+B}(-B)f_{-B}=(A+B)f_{A+B}f_{-B}-f_{A+B}Bf_{-B}.$$

Or, *A* et *B* commutent, donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t(A+B)$ et *B* commutent et d'après la question **Q15**, $f_{A+B}(t)=e^{t(A+B)}$ et *B* commutent. Ainsi :

$$g'=(A+B)f_{A+B}f_{-B}-Bf_{A+B}f_{-B}=Af_{A+B}f_{-B}=Ag.$$

Finalement :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } g'=Ag.}$$

Q29. Comme vu dans la question On a $f_A(0)=e^{0A}=e^{0_n}=I_n$ et $g(0)=e^{0(A+B)}e^{-0B}=I_nI_n=I_n$. Ainsi :

$$\boxed{f_A(0)=g(0)=I_n}$$

Q30. Soit $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. D'après **Q27**, la fonction $t\mapsto f_A(t)X_0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases}X'=AX\\ X(0)=X_0\end{cases}$.

Or, d'après la question précédente, $g'=Ag$, donc :

$$(gX_0)'=g'X_0=(Ag)X_0=A(gX_0).$$

Ainsi, $t \mapsto g(t)X_0$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$. De plus, $g(0)X_0 = I_n X_0 = X_0$, donc la fonction $t \mapsto g(t)X_0$ est aussi solution sur $\mathbb{R}$ de $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ et finalement :

$$\boxed{t \mapsto f_A(t)X_0 \text{ et } t \mapsto g(t)X_0 \text{ vérifient sur } \mathbb{R} \text{ le même problème de Cauchy : } \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}.}$$

Q31. Avec les questions **Q27** et **Q30**, on peut conclure que pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $gX_0 = f_A X_0$.

Ceci permet de conclure que $g = f_A$, soit pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}.$$

Ceci est vrai dès que les matrices A et B commutent. Comme 0_n commute avec toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t(0_n+B)}e^{-tB} = e^{t0_n}$, soit $e^{tB}e^{-tB} = I_n$, ce qui permet de conclure que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tB} est inversible (mais on le savait déjà) et :

$$\boxed{(e^{tB})^{-1} = e^{-tB}}$$

L'égalité $e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}$ multipliée par e^{tB} à droite donne alors $e^{t(A+B)} = e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{tB} = e^{tA}e^{tB}$.

Or, A et B commutent, donc tA et tB commutent et d'après **Q15**, e^{tA} et e^{tB} commutent aussi.

Finalement, on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}}$$

III – Comportement asymptotique

III – A. Étude d'un exemple

Q32. On a $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et α et β sont valeurs propres simple et double respectivement, donc :

$$\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)^2.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$\chi_A(A) = (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)^2 = (A-\beta I_3)^2(A-\alpha I_3) = 0_3.$$

Donc, $\operatorname{Im}\left(A-\alpha I_3\right) \subset \ker\left((A-\beta I_3)^2\right)$, ce qui donne :

$$rg\left(A-\alpha I_3\right) \leq \dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right).$$

Or, α est valeur propre simple de A, donc $\dim\ker\left(A-\alpha I_3\right) = 1$ et par le théorème du rang :

$$rg\left(A-\alpha I_3\right) = 3 - \dim\ker\left(A-\alpha I_3\right) = 2.$$

Enfin, $(A-\beta I_3)^2 \neq 0_3$ car sinon α, qui est différent de β, ne serait pas valeur propre de A. Donc, on a $\dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right) \leq 2$ et ainsi, $2 \leq \dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right) \leq 2$, soit :

$$\boxed{\dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right) = 2}$$

On a vu que $\dim\ker(A-\alpha I_3) = 1$ et $\dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right) = 2$, donc :

$$\dim\ker(A-\alpha I_3) + \dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right) = 1+2 = 3 = \dim\mathbb{C}^3 \quad \textbf{(1)}.$$

De plus, si $X \in \ker(A-\alpha I_3) \cap \ker\left((A-\beta I_3)^2\right)$, on a $AX = \alpha X$ et $(A-\beta I_3)^2 X = 0$, d'où :

$$(A-\beta I_3)^2 X = A^2X - 2\beta AX + \beta^2 X = \alpha^2 X - 2\beta\alpha X + \beta^2 X = (\alpha-\beta)^2 X = 0.$$

Comme $\alpha \neq \beta$, on obtient $X = 0$ et ainsi :

$$\ker(A-\alpha I_3) \cap \ker\left((A-\beta I_3)^2\right) = \{0\} \quad \textbf{(2)}.$$

Les résultats **(1) et (2)** permettent de conclure que :

$$\boxed{\mathbb{C}^3 = \ker(A-\alpha I_3) \oplus \ker\left((A-\beta I_3)^2\right)}$$

Q33. Comme $(A-\beta I_3)^2$ et A commutent, le sous-espace $F = \ker\left((A-\beta I_3)^2\right)$ est stable par u, l'endomorphisme canoniquement associé à A.

De plus, l'endomorphisme v, induit par u sur F est trigonalisable (on travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

Enfin, on a $(v-\beta id_F)^2 = 0$, donc $(X-\beta)^2$ est annulateur de v et donc, β est la seule valeur propre complexe de v.

Il existe donc une base $\mathcal{B}_2$ de F telle que $M_{\mathcal{B}_2}(v) = \begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = C$.

Si on considère une base $\mathcal{B}_1$ de $\ker(A-\alpha I_3)$, avec $\mathbb{C}^3 = \ker(A-\alpha I_3) \oplus \ker\left((A-\beta I_3)^2\right)$, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et dans cette base, la matrice de u a la forme demandée.

Comme A est la matrice de u dans la base canonique :

$$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice de la forme } T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{C}.}$$

Avec $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & C \end{pmatrix}$ et le produit par blocs, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & C^k \end{pmatrix}$.

Comme I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_2$, on a :

$$C^k = \begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^k = \left[\beta I_2 + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^k = \beta^k I_2 + k\beta^{k-1}a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^k & k\beta^{k-1}a \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{T^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 & 0 \\ 0 & \beta^k & k\,a\,\beta^{k-1} \\ 0 & 0 & \beta^k \end{pmatrix}}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tT} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tT)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k T^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 & 0 \\ 0 & \beta^k & k\,a\,\beta^{k-1} \\ 0 & 0 & \beta^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k \alpha^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k \beta^k & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k k\,a\,\beta^{k-1} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k \beta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\alpha)^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^k}{k!} & at \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^k}{k!} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta t} & ate^{\beta t} \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix}}$$

Comme A est semblable à T, il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tA = P(tT)P^{-1}$ et d'après **Q14**, on a $Pe^{tT}P^{-1} = e^{tA}$. Or, on a vu que dans la question **Q14** que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, donc si la limite existe, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tA} = \lim\limits_{t \to +\infty} Pe^{tT}P^{-1} = P\left(\lim\limits_{t \to +\infty} e^{tT}\right)P^{-1}$ et :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\lim_{t \to +\infty} e^{tT}\right)P^{-1} = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} e^{tT} = 0_3.$$

Or, une application matricielle est de limite nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = \lim_{t \to +\infty} e^{\beta t} = \lim_{t \to +\infty} ate^{\beta t} = 0.$$

Or, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\alpha t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{\beta t} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, et dans ce cas, $\lim\limits_{t \to +\infty} ate^{\beta t} = 0$ par croissances comparées.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\alpha) < 0 \\ \mathrm{Re}(\beta) < 0 \end{cases}}$$

III* – B. *Cas général

Q34. En reprenant le résultat établi au cours de la question **Q17**, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle $T = P^{-1}AP$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 0 & \lambda_2 & & (*) & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les λ_i étant les valeurs propres de A. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1}$ avec :

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & & \\ 0 & e^{t\lambda_2} & & (**) & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Exactement comme dans la question précédente, si on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_n$, alors on a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tT} = 0_n$, ce qui implique (entre autres) que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0.$$

Ainsi, si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, soit :

$$\boxed{\alpha = \max_{\lambda\in Sp(A)} \operatorname{Re}(\lambda) < 0}$$

Q35. On a admis que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(A)} F_\lambda$ avec $F_\lambda = \ker\left((u-\lambda\, id_{\mathbb{C}^n})^{m_\lambda}\right)$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$.

Notons $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ et pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $n_i = \dim F_{\lambda_i}$.

Soit $i \in [\![1,r]\!]$.

Comme $(u-\lambda_i\, id_{\mathbb{C}^n})^{m_{\lambda_i}}$ est un polynôme en u, F_{λ_i} est stable par u. Et, comme on travaille dans $\mathbb{C}$, l'endomorphisme u_i induit par u sur F_{λ_i} est trigonalisable. Or, $(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$ est annulateur de u_i (car $F_{\lambda_i} = \ker\left((u-\lambda_i\, id_{\mathbb{C}^n})^{m_{\lambda_i}}\right)$), donc λ_i est la seule valeur propre complexe de u_i.

Il existe donc une base $\mathcal{B}_i$ de F_{λ_i} dans laquelle la matrice de u_i s'écrit $M_{\mathcal{B}_i}(u_i) = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ où N_i est une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$.

Comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{i\in[\![1,r]\!]} F_{\lambda_i}$, la famille $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in[\![1,r]\!]} \mathcal{B}_i$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et dans cette base, on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(u) &= diag\left(M_{\mathcal{B}_1}(u_1), \dots, M_{\mathcal{B}_r}(u_r)\right) = diag\left(\lambda_1 I_{n_1} + N_1, \dots, \lambda_r I_{n_r} + N_r\right) \\ &= diag\left(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r}\right) + diag\left(N_1, \dots, N_r\right) \end{aligned}$$

Posons alors $D = diag\left(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N = diag\left(N_1, \dots, N_r\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrices diagonales par blocs).

- Comme les $\lambda_i I_{n_i}$ sont scalaires, D est diagonale.
- Comme les N_i triangulaires supérieures strictes, N l'est aussi.
  Alors, le polynôme caractéristique de N est X^{n_i} et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, ce polynôme est annulateur de N, donc $N^n = 0_n$ et N est nilpotente.
- Avec les produits par blocs, on a $DN = diag\left(\lambda_1 N_1, \dots, \lambda_r N_r\right) = ND$.
- Comme u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A et $M_{\mathcal{B}}(u) = D+N$, ces deux matrices sont semblables, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P(D+N)P^{-1}$.
- Le polynômes caractéristique est un invariant de similitude, donc $\chi_A = \chi_{D+N}$.
  Or, $D+N$ est triangulaire et ses éléments diagonaux sont ceux de D, donc $\chi_{D+N} = \chi_D$, et ainsi, $\chi_A = \chi_D$.

Finalement :

> Il existe bien trois matrices P, D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :
> - P est inversible, D est diagonale, N est nilpotente ;
> - $ND = DN$;
> - $A = P(D+N)P^{-1}$;
> - $\chi_A = \chi_D$.

Q36. On a $A = P(D+N)P^{-1}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_A(t) = e^{tA} = Pe^{t(D+N)}P^{-1} = Pe^{tD+tN}P^{-1}.$$

D'après la question précédente, D et N commutent, donc d'après la question **Q31** :

$$f_A(t) = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}.$$

Si $D = diag\left(d_1, \dots, d_n\right)$, on a :

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tD)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} diag\left(t^k d_1^k, \dots, t^k d_n^k\right) \\ &= diag\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k d_n^k\right) = diag\left(e^{td_1}, \dots, e^{td_n}\right) \end{aligned}$$

Remarquons de plus que $\chi_A = \chi_D = \prod_{i=1}^{n}(X - d_i)$, donc $d_1, \dots, d_n$ sont les valeurs propres de A et ainsi :

$$\alpha = \max_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{Re}(\lambda) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \mathrm{Re}(d_i).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p+1$ soit l'indice de nilpotence de N. On a alors :

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tN)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k N^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} t^k N^k .$$

Ceci veut dire que les coefficients de e^{tN} sont polynomiaux en *t*. Notons pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $[e^{tN}]_{i,j}=Q_{i,j}(t)$ avec $Q_{i,j}\in\mathbb{C}_p[X]$. On a alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$[e^{tD}e^{tN}]_{i,j}=e^{d_it}Q_{i,j}(t).$$

Alors, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}v_{i,j}(t)&=[f_A(t)]_{i,j}=[Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}]_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}[Pe^{tD}e^{tN}]_{i,k}[P^{-1}]_{k,j}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}[P]_{i,\ell}[e^{tD}e^{tN}]_{\ell,k}[P^{-1}]_{k,j}=\sum_{1\le \ell,k\le n}[P]_{i,\ell}[P^{-1}]_{k,j}e^{d_\ell t}Q_{\ell,k}(t)\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ et tout $t\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{v_{i,j}(t)}{t^pe^{\alpha t}}=\sum_{1\le \ell,k\le n}[P]_{i,\ell}[P^{-1}]_{k,j}\frac{e^{d_\ell t}Q_{\ell,k}(t)}{t^pe^{\alpha t}}=\sum_{1\le \ell,k\le n}[P]_{i,\ell}[P^{-1}]_{k,j}e^{(d_\ell-\alpha)t}\frac{Q_{\ell,k}(t)}{t^p}.$$

Or, pour tout $\ell,k\in[\![1,n]\!]^2$:

- $\deg Q_{i,j}\le p$, donc $t\mapsto\dfrac{Q_{\ell,k}(t)}{t^p}$ est bornée au voisinage de + ∞ ;
- $\mathrm{Re}(d_\ell-\alpha)=\mathrm{Re}(d_\ell)-\alpha\le 0$, donc $t\mapsto e^{(d_\ell-\alpha)t}$ est bornée au voisinage de + ∞.

Ainsi, pour tout $\ell,k\in[\![1,n]\!]^2$, $t\mapsto e^{(d_\ell-\alpha)t}\dfrac{Q_{\ell,k}(t)}{t^p}$ est bornée au voisinage de + ∞, et il va de même de toute combinaison linéaire de ces fonctions, en particulier les $v_{i,j}$.

Ceci prouve qu'il existe un entier naturel *p* tel que, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$\boxed{v_{i,j}(t)=\underset{t\to+\infty}{O}\left(t^pe^{\alpha t}\right)}$$

Q37. Si $\alpha<0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty}t^pe^{\alpha t}=0$. Avec le résultat ci-dessus, on a alors par comparaison, $\lim\limits_{t\to+\infty}v_{i,j}(t)=0$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Autrement dit, $\lim\limits_{t\to+\infty}f_A(t)=0_n$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La réciproque de la question } \textbf{Q34} \text{ est vraie.}}$$

Q38. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Avec $A=P(D+N)P^{-1}$, $D=diag\left(d_1,\dots,d_n\right)$, les d_k étant les valeurs propres de A, toutes positives ici par hypothèse, et *N* triangulaire supérieures stricte, on a vu que $f_A(t)=e^{tA}=Pe^{t(D+N)}P^{-1}$ avec $e^{t(D+N)}=\begin{pmatrix}e^{d_1t}&&&&\\0&e^{d_2t}&&(**)&\\0&0&\ddots&&\\\vdots&&\ddots&\ddots&\\0&\cdots&\cdots&0&e^{d_nt}\end{pmatrix}$.

Posons $Z = P^{-1}X = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Avec la continuité de l'application $M \mapsto P^{-1}M$ établie **Q15**, on peut écrire :

$$\lim_{t \to +\infty} f_A(t)X = \lim_{t \to +\infty} Pe^{t(D+N)}P^{-1}X = 0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} e^{t(D+N)}Z = 0_{n,1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} \left(e^{d_1 t} z_1 + [e^{t(D+N)}]_{1,2}\, z_2 + \ldots + [e^{t(D+N)}]_{1,n}\, z_n\right) = 0 \\ \quad\vdots \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \left(e^{d_k t} z_k + [e^{t(D+N)}]_{k,k+1}\, z_{k+1} + \ldots + [e^{t(D+N)}]_{k,n}\, z_n\right) = 0 \\ \quad\vdots \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \left(e^{d_{n-1} t} z_{n-1} + [e^{t(D+N)}]_{n-1,n}\, z_n\right) = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} e^{d_n t} z_n = 0 \end{cases}.$$

Prouvons alors par récurrence forte, finie et descendante que $z_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Initialisation : Pour $k = n$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{d_n t} z_n = 0$ et par hypothèse, $d_n \geq 0$, donc si $z_n \neq 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{d_n t} z_n \neq 0$, ce qui est contradictoire, donc $z_n = 0$ et la propriété est vraie au rang $k = n$.

Hérédité : Pour $k \in [\![2,n]\!]$, on suppose la propriété vraie aux rangs $k, k+1, \ldots, n$.

On a donc $z_k = z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$ et la $(k-1)^{\text{ième}}$ du système ci-dessus se récrit juste $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{d_{k-1} t} z_{k-1} = 0$. Avec $d_{k-1} \geq 0$, on obtient comme ci-dessus $z_{k-1} = 0$ et la propriété vraie au rang $k-1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, soit :

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0.$$

Ceci se récrit $Z = 0_{n,1}$, et donc $X = PZ = 0_{n,1}$.

Réciproquement, si $X = 0_{n,1}$, on a $f_A(t)X = 0_{n,1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f_A(t)X = 0_{n,1}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f_A(t)X = 0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad X = 0_{n,1}}$$