

DM de Mathématiques n° 5

Soit $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} |u_{n,p}|$ converge.

On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ et on suppose en outre que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ converge.

1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{n,p}|$ converge.

2) Justifier que la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{n,p}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,p}$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

3) Montrer que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$ et $\sum_{p \in \mathbb{N}} s_p$ convergent absolument.

On note alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et $S' = \sum_{p=0}^{+\infty} s_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

4) Dans cette question, on suppose que les $u_{n,p}$ sont des réels positifs. Prouver que $S = S'$.

5) Dans cette question, on revient au cas général.

a. Justifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$.

b. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left| S' - \sum_{n=0}^N \sigma_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$.

c. En déduire que l'on a encore $S = S'$.

On vient donc de prouver que pour une famille $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que la série

$\sum_{p \in \mathbb{N}} |u_{n,p}|$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right)$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$

(et ces sommes ont du sens).

Quitte à réindexer, cette formule d'interversion reste vraie si les sommes ne commencent pas à 0, soit :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sum_{p=p_0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=p_0}^{+\infty} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

6) Une application.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $] -R, R[$ avec $R > 0$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est développable en série entière sur $] -R, R[$ avec pour

tout $x \in] -R, R[$, $f_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} x^p$.

- a. Justifier que pour tout $x \in] -R, R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} |a_{n,p} x^p|$ converge.

On suppose en outre que pour tout $x \in] -R, R[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p} x^p| \right)$ converge.

- b. Montrer que $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et développable en série entière sur $] -R, R[$ et exprimer les coefficients du développement en série entière de F à l'aide des $a_{n,p}$.

7) Une application de l'application.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$.

- a. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .
- b. Prouver que $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ (au moins) et donner le développement.
- c. Montrer que le rayon de convergence de la série entière obtenue est 1.

☺ On pourra penser à la comparaison série-intégrale.