

## ***DM de Mathématiques n° 5***

Soit  $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$  une famille de nombres complexes.

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} |u_{n,p}|$  converge.

On note alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$  et on suppose en outre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$  converge.

1) Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{n,p}|$  converge.

2) Justifier que la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_{n,p}$  converge pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,p}$  converge pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

On note alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $s_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ .

3) Montrer que les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$  et  $\sum_{p \in \mathbb{N}} s_p$  convergent absolument.

On note alors  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$  et  $S' = \sum_{p=0}^{+\infty} s_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ .

4) Dans cette question, on suppose que les  $u_{n,p}$  sont des réels positifs. Prouver que  $S = S'$ .

5) Dans cette question, on revient au cas général.

a. Justifier que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ .

b. Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\left| S' - \sum_{n=0}^N \sigma_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| - \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ .

c. En déduire que l'on a encore  $S = S'$ .

On vient donc de prouver que pour une famille  $(u_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes telle que la série

$\sum_{p \in \mathbb{N}} |u_{n,p}|$  converge pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right)$  converge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$

(et ces sommes ont du sens).

Quitte à réindexer, cette formule d'interversion reste vraie si les sommes ne commencent pas à 0, soit :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sum_{p=p_0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=p_0}^{+\infty} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{n,p}.$$

6) *Une application.*

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $] -R, R [$  avec  $R > 0$ .

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est développable en série entière sur  $] -R, R [$  avec pour tout  $x \in ] -R, R [$ ,  $f_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} x^p$ .

- a. Justifier que pour tout  $x \in ] -R, R [$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{p \in \mathbb{N}} |a_{n,p} x^p|$  converge.

On suppose en outre que pour tout  $x \in ] -R, R [$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{n,p} x^p| \right)$  converge.

- b. Montrer que  $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est définie et développable en série entière sur  $] -R, R [$  et exprimer les coefficients du développement en série entière de  $F$  à l'aide des  $a_{n,p}$ .

7) *Une application de l'application.*

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$ .

- a. Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Prouver que  $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est développable en série entière sur  $] -1, 1 [$  (au moins) et donner le développement.
- c. Montrer que le rayon de convergence de la série entière obtenue est 1.

☺ On pourra penser à la comparaison série-intégrale.