# *DM de Mathématiques n° 6*

## *Exercice 1*

Soit la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition *D* de *f*, puis montrer que *f* est de classe $C^\infty$ sur *D*.
2) Déterminer l'équivalent le plus simple de *f* en 0 et en + ∞.

   ☺ *Pour l'équivalent en 0, on pourra effectuant le changement de variable $u = xt$, puis montrer que $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u}\,du$ est bornée au voisinage de 0 et utiliser la convexité de la fonction exponentielle pour encadrer $\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x^2+u}\,du$.*

   ☺ *Pour l'équivalent en + ∞, on pourra effectuer une intégration par parties (proprement !).*
3) Dresser le tableau de variation complet de *f* sur *D*.
4) Déterminer une équation différentielle (*E*) dont *f* est solution sur *D*.
5) Résoudre (*E*) et en déduire que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,dt = 2e^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt .$$

## *Exercice 2*

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$.

1) Montrer que *f* est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$.
3) Déterminer un équivalent simple de *f* en $0^+$.
4) Prouver que *f* est intégrable en + ∞.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$.

5) Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.
6) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$.
7) Dresser le tableau de variation complet de *F* sur $\mathbb{R}_+^*$.
8) Justifier que pour tout $x \in \left]1, +\infty\right[$, $F(x+1) + F(x) \le 2F(x) \le F(x) + F(x-1)$. En déduire un équivalent simple de *F* en $+\infty$.

9) La fonction $x \mapsto F(x) - \dfrac{1}{2x}$ est-elle intégrable en 0 ? En $+\infty$ ?

10) Prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_1^{2p} F(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sum_{n=1}^{2p-1} (-1)^n \ln n\,.$$

☺ *On pourra établir que pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n}$ *, puis montrer que pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, *on a* :

$$\sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \ln n = \ln\left(\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}\right) = \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}\ln \pi + \underset{m\to+\infty}{o}(1)\,.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(F(t) - \frac{1}{2t}\right)dt$.