DS de Mathématiques n° 4

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 6 pages.

Problème 1

– extrait de Centrale-Supélec - 2024 - MP-MPI - Mathématiques 1 –

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_k$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ converge et vérifie l'inégalité de Carleman :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n .$$

La partie I établit l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la partie II pour démontrer l'inégalité de Carleman. Les deux parties sont sinon indépendantes.

Soit un entier $n \geq 2$.

On note $U_n = (\mathbb{R}_+^*)^n$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Son adhérence $\overline{U_n}$ est $\overline{U_n} = (\mathbb{R}_+)^n$.

I – Inégalité arithmético-géométrique

Soit un réel $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{U_n}$:

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - s .$$

On note X_s le sous-ensemble de $\overline{U_n}$ constitué des zéros de g_s, soit $X_s = \left\{x \in \overline{U_n} \setminus g_s(x) = 0\right\}$.

Q1. Justifier que f et g_s sont de classe C^1 sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U_n.

Q2. Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est atteint sur $X_s \cap U_n$.

☺ *On pourra vérifier que f est strictement positive en certains points de* $X_s \cap U_n$.

On note $a=(a_1,\dots,a_n)$ un élément de $X_s\cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

Q3. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda>0$ tel que, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $a_k=\dfrac{f(a)}{\lambda}$.

Q4. Démontrer alors que, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in X_s\cap U_n$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\,.$$

Montrer que cette inégalité reste varie pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ de $(\mathbb{R}_+)^n$ (inégalité arithmético-géométrique).

II – Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\overline{U_n},\ F_n(x_1,\dots,x_n)=x_1+(x_1x_2)^{1/2}+(x_1x_2x_3)^{1/3}+\dots+(x_1x_2\dots x_n)^{1/n}.$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\overline{U_n},\ h_n(x_1,\dots,x_n)=x_1+x_2+\dots+x_n-1.$$

On admet que F_n et h_n sont toutes deux de classe C^1 sur U_n.

On note H_n l'ensemble $H_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus x_1+x_2+\dots+x_n=1\}$.

Q5. Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n.

Q6. Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n}\cap H_n$ admet un maximum, noté M_n.

On admet que ce maximum est en fait atteint sur $U_n\cap H_n$.

On note $a=(a_1,\dots,a_n)$ un point de $U_n\cap H_n$ en lequel le maximum M_n est atteint.

Pour un entier k compris entre 1 et n, on note $\gamma_k=(a_1a_2\dots a_k)^{1/k}$.

Q7. Démontrer qu'il existe un réel $\lambda>0$ tel que :

$$\begin{cases}\gamma_1+\dfrac{\gamma_2}{2}+\dots+\dfrac{\gamma_n}{n}=\lambda a_1\\[2mm] \dfrac{\gamma_2}{2}+\dots+\dfrac{\gamma_n}{n}=\lambda a_2\\[2mm] \vdots\\[2mm] \dfrac{\gamma_n}{n}=\lambda a_n\\[2mm] a_1+a_2+\dots+a_n=1\end{cases}$$

Q8. En déduire que :

a) $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = M_n$.

b) Pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$ où :

$$\begin{cases} \omega_k = k\left(1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right) & \text{si } k \in [\![1,n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}$$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leq e$. Pour cela, on suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

Q9. Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{e} \leq \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$.

Q10. Démontrer que $\omega_1 \leq \dfrac{1}{e}$ et que, pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, $\omega_k \leq \dfrac{k}{k+1}$.

☺ *On pourra démontrer que pour tout* $k \in [\![1,n-1]\!]$, $\omega_{k+1}^{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\omega_k^k \left(1 - \dfrac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$.

Q11. Aboutir à une contradiction sur ω_n.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_1 x_2 \ldots x_k)^{1/k} \leq e.$$

Q12. En déduire l'inégalité de Carleman.

Problème 2

– extraits adaptés de Mines-Ponts - 2022 - MP - Mathématiques 1
& Centrale-Supélec - 2022 - TSI - Mathématiques 1 –

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

On rappelle que toutes les normes de $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $[M]_{i,j}$ son coefficient d'indices i, j et χ_M son polynôme caractéristique.

On a admet que pour toutes matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T = \begin{pmatrix} t_1 & & & (*) \\ 0 & t_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_n \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP \quad \text{et} \quad T^k = \begin{pmatrix} t_1^k & & & (*') \\ 0 & t_2^k & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_n^k \end{pmatrix}.$$

Question préliminaire

Q13. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application N qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe $N(M) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left| [M]_{i,j} \right|$.

a. Montrer que N est une norme. On notera désormais $N(M) = \|M\|$.

b. Calculer $\|I_n\|$.

c. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.

d. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

I – Exponentielle de matrice

On admet que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge.

Sa limite, notée e^A, est appelée exponentielle de la matrice A. On a donc $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q14. On suppose que A et B sont semblables. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Montrer que $e^B = P^{-1} e^A P$.

Q15. On suppose que A et B commutent.

Montrer que A et e^B commutent, puis que e^A et e^B commutent.

Q16. Prouver que $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Q17. Montrer que $\det(e^A) = e^{tr(A)}$. En déduire que e^A est inversible.

II – Le système linéaire $X' = AX$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle (S) le système linéaire :

$$X' = AX$$

d'inconnue $X : t \mapsto X(t)$, une fonction vectorielle de la variable t dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).

II – A. Étude d'un exemple

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q18. Déterminer le rang de $A - I_3$ et démontrer que les deux vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\ker(A - I_3)$.

Q19. Montrer que $\ker(A + I_3)$ est une droite. Donner le vecteur v_3 directeur de $\ker(A + I_3)$ dont la première coordonnée est 1.

Q20. Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q21. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Q22. Résoudre le système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$ où $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
☺ *On pourra poser* $Z(t) = P^{-1}X(t) = (a(t), b(t), c(t))$ ($\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *étant identifiés*).

Q23. Montrer que si X est solution de $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ $X(t) = e^{tA}X(0)$.

II – B. Cas général

On pose $f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,;\, t \mapsto e^{tA}$.

On rappelle que si M et N sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ respectivement (avec $p \in \mathbb{N}^*$), alors MN est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $(MN)' = M'N + MN'$.

Q24. Prouver que f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_A'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

☺ *On rappelle que* $e^{tA} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[A^k]_{i,j}}{k!} t^k \right)_{1 \le i,j \le n}$.

Q25. Prouver que l'ensemble des solutions de (S), noté $S_{(S)}$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On admet que cet espace vectoriel est de dimension n.

Q26. On note $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (toujours identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_i : t \mapsto e^{tA}E_i$. Montrer que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $S_{(S)}$.

Q27. Prouver alors que, pour X_0 est un vecteur fixé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Soit B une deuxième matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec A. On définit l'application :

$$g : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$
$$t \mapsto e^{t(A+B)}e^{-tB}$$

Q28. Prouver que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer g'.

Q29. Déterminer $f_A(0)$ et $g(0)$.

Q30. Montrer que pour tout vecteur X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $t \mapsto f_A(t)X_0$ et $t \mapsto g(t)X_0$ vérifient un même problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$.

Q31. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-tB} = (e^{tB})^{-1}$, puis que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$.

III – Comportement asymptotique

III – A. Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet α pour valeur propre simple et β pour valeur propre double.

Q32. Prouver que $\dim\ker\left((A-\beta I_3)^2\right)=2$, puis que $\mathbb{C}^3=\ker\left(A-\alpha I_3\right)\oplus\ker\left((A-\beta I_3)^2\right)$.

Q33. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $T=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & a\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{C}$.

Calculer T^k pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, puis e^{tT} pour tout réel t.

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}=0_3$.

III* – B. *Cas général

On se donne $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans la partie précédente, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X'=AX$.

Pour tout réel t et tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on notera ici $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices i,j de la matrice e^{tA}. Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_A(t)=e^{tA}=\left(v_{i,j}(t)\right)_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour toute valeur propre $\lambda\in\mathbb{C}$ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel :

$$F_\lambda=\ker\left((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}\right)=\ker\left((u-\lambda\, id_{\mathbb{C}^n})^{m_\lambda}\right).$$

On admet que :

$$\mathbb{C}^n=\bigoplus_{\lambda\in Sp(A)}F_\lambda.$$

On posera enfin $\alpha=\max\limits_{\lambda\in Sp(A)}\operatorname{Re}(\lambda)$.

Q34. Montrer que si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t)=0_n$, alors $\alpha<0$.

Q35. Prouver qu'il existe trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

- P est inversible, D est diagonale, N est nilpotente ;
- $ND=DN$;
- $A=P(D+N)P^{-1}$;
- $\chi_A=\chi_D$.

Q36. En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on ait :

$$v_{i,j}(t)=\underset{t\to+\infty}{O}\left(t^p e^{\alpha t}\right).$$

Q37. Étudier la réciproque de la question **Q34**.

Q38. On suppose, dans cette question, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} f_A(t)X=0_{n,1}\quad\Leftrightarrow\quad X=0_{n,1}.$$

- FIN DU SUJET -