Corrigé du DS n° 5

A. Fonctions L et P

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1. Donc, la série $\sum z^n$ converge pour tout $z \in D$.

Or, pour tout complexe z, on a $\dfrac{z^n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(z^n)$, donc :

$$\boxed{\sum \frac{z^n}{n} \text{ pour tout } z \in D.}$$

Lorsque $z \in \left]-1,1\right[$ (donc z est réel), on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ et en intégrant terme à terme, on obtient, pour tout $z \in \left]-1,1\right[$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)}$$

2. Soit $z \in D$.

La série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n} t^n = \sum \frac{(tz)^n}{n}$ (de variable t) a un rayon de convergence R supérieure ou égal à $\dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$ et infini si $z = 0$, donc $R > 1$. Alors, $\displaystyle\Phi : t \mapsto L(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n}$ est définie et dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $\displaystyle t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1}$. Et, pour tout $t \in [0,1]$, on a $tz \in D$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{+\infty} (zt)^{n-1} = z \sum_{n=0}^{+\infty} (zt)^n = \frac{z}{1-zt}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi : t \mapsto L(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n} \text{ est dérivable sur } [0,1], \text{ de dérivée } \Phi' : t \mapsto \frac{z}{1-zt}.}$$

3. La fonction $\psi : t \mapsto (1-zt)e^{L(tz)} = (1-zt)e^{\Phi(t)}$ est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de telles fonctions, de dérivée :

$$\Psi' : t \mapsto (1-zt)\varphi'(t)e^{\varphi(t)} - z e^{\varphi(t)} = (1-zt)\frac{z}{1-zt} e^{\varphi(t)} - z e^{\varphi(t)} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } \psi : t \mapsto (1-zt)e^{L(tz)} \text{ est constante sur } [0,1].}$$

On a alors $\psi(1) = \psi(0)$, soit $(1-z)e^{L(z)} = e^{L(0)} = e^0 = 1$ et donc :

$$\boxed{e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}}$$

4. Soit $z \in D$. On a $|z|<1$, donc la série géométrique $\sum |z|^n$ converge et :

$$|L(z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n}.$$

D'après la question **1**, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln\left(1-|z|\right)$ et ainsi, pour tout $z \in D$:

$$\boxed{|L(z)| \leq -\ln\left(1-|z|\right)}$$

Pour tout $z \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n \in D$, donc :

$$|L(z^n)| \leq -\ln\left(1-|z^n|\right) = -\ln\left(1-|z|^n\right).$$

Or, comme $|z|<1$, on a $|z|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $-\ln\left(1-|z|^n\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} |z|^n$ et la série $\sum |z|^n$ converge, donc la série $\sum -\ln\left(1-|z|^n\right)$ converge et par comparaison, la série $\sum |L(z^n)|$ converge.

Ainsi, la série $\sum L(z^n)$ est absolument convergente, donc pour tout $z \in D$:

$$\boxed{\text{La série } \sum L(z^n) \text{ converge.}}$$

5. Si pour tout $z \in D$, $P(z) = \exp\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right)$, on a $P(z) \neq 0$ car une exponentielle, même complexe, n'est jamais nulle, et par continuité de l'exponentielle et la question 3 :

$$P(z) = \exp\left(\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \lim_{N \to +\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \lim_{N \to +\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} e^{L(z^n)}\right) = \lim_{N \to +\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}\right).$$

Ainsi, pour tout $z \in D$:

$$\boxed{P(z) \neq 0 \text{ et } P(z) = \lim_{N \to +\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}\right).}$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $e^{-t} \in \left]0,1\right[\subset D$ et $P(e^{-t}) = \displaystyle\lim_{N \to +\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-(e^{-t})^n}\right) = \lim_{N \to +\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-nt} < 1$, donc $\dfrac{1}{1-e^{-nt}} > 0$ et ainsi, $\ln(1-e^{-nt})$ et $\ln P(e^{-t})$ sont définis.

Par continuité de la fonction ln, on peut alors écrire :

$$\ln P(e^{-t}) = \ln\left[\lim_{N \to +\infty}\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-(e^{-t})^n}\right)\right] = \lim_{N \to +\infty}\left(\ln\left[\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right]\right) = \lim_{N \to +\infty}\left(-\sum_{n=1}^{N} \ln(1-e^{-nt})\right).$$

Soit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\ln P(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt})}$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}$.

6. La fonction q est définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [n, n+1[$, on a $q(x) = x - n - \dfrac{1}{2}$, donc q est affine sur $[n, n+1[$: elle est continue sur $[n, n+1[$ et admet des limites finies en n^+ et $(n+1)^-$.

  Alors, q est affine par morceaux, donc continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ avec $\left(a, \lfloor a \rfloor + 1, \lfloor a \rfloor + 1, \dots, \lfloor b \rfloor, b\right)$ une subdivision adaptée. Ainsi :

$$\boxed{q \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

- On a $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x+1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$q(x+1) = x+1 - \lfloor x+1 \rfloor - \frac{1}{2} = x+1 - \left(\lfloor x \rfloor + 1\right) - \frac{1}{2} = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = q(x).$$

  Donc :

$$\boxed{q \text{ est 1-périodique sur } \mathbb{R}.}$$

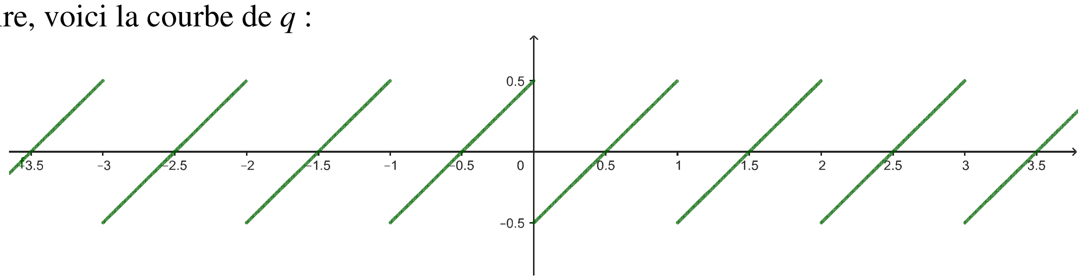
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et :
  - si $x \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor -x \rfloor = -x$, donc $|q(-x)| = |q(x)| = \dfrac{1}{2}$;
  - si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$, donc :

$$|q(-x)| = \left| -x - \lfloor -x \rfloor - \frac{1}{2} \right| = \left| -x + \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{2} \right| = \left| -x + \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \right| = \left| -\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \right| = |q(x)|.$$

  Ainsi :

$$\boxed{|q| \text{ est paire.}}$$

Pour mémoire, voici la courbe de q :



7. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{q(u)}{e^{tu} - 1}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $u \in [1, +\infty[$, on a $\lfloor u \rfloor < u < \lfloor u \rfloor + 1$, donc $-\dfrac{1}{2} < q(u) < \dfrac{1}{2}$, soit :

$$|q(u)| < \frac{1}{2}.$$

Avec $e^{tu}-1>0$, on obtient :

$$\left|\frac{q(u)}{e^{tu}-1}\right|<\frac{1}{2}\frac{1}{e^{tu}-1}.$$

Or, $\dfrac{1}{e^{tu}-1}\underset{u\to+\infty}{\sim}e^{-tu}$ et $\int_1^{+\infty}e^{-tu}du$ converge, donc $\int_1^{+\infty}\dfrac{du}{e^{tu}-1}$ converge.

Par comparaison, on en déduit que $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{q(u)}{e^{tu}-1}\right|du$ converge et donc :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{e^{tu}-1}du \text{ est bien définie pour tout réel } t>0.}$$

8. La fonction $u\mapsto\dfrac{q(u)}{u}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>1$ (donc $n\geq 2$), on a $n-1\geq 1$ et :

$$\begin{aligned}
\int_1^n\frac{q(u)}{u}du &= \int_1^n\frac{1}{u}\left(u-\lfloor u\rfloor-\frac{1}{2}\right)du=\int_1^n\left(1-\frac{1}{2u}\right)du-\int_1^n\frac{\lfloor u\rfloor}{u}du\\
&=\left[u-\frac{1}{2}\ln u\right]_1^n-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\lfloor u\rfloor}{u}du=1-\frac{1}{2}\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{k}{u}du\\
&=n-1-\frac{1}{2}\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}\left[k\ln u\right]_k^{k+1}=1-\frac{1}{2}\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}\left[k\ln(k+1)-k\ln k\right]\\
&=n-1-\frac{1}{2}\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)\ln(k+1)-k\ln k-\ln(k+1)\right]\\
&=n-1-\frac{1}{2}\ln n-\sum_{k=1}^{n-1}\left[(k+1)\ln(k+1)-k\ln k\right]+\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)\\
&=1-\frac{1}{2}\ln n-n\ln n+\sum_{k=2}^{n}\ln k
\end{aligned}$$

Et $\sum_{k=2}^{n}\ln k=\ln(2\times\ldots\times n)=\ln(n!)$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>1$:

$$\boxed{\int_1^n\frac{q(u)}{u}du=\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n-n\ln n+n-1=\ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right)-1}$$

9. Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a $[\lfloor x\rfloor,x]\subset[1,+\infty[$ et $u\mapsto\dfrac{q(u)}{u}$ est continue par morceaux sur $[\lfloor x\rfloor,x]$.

On a vu que pour tout $u\in[1,+\infty[$, $|q(u)|<\dfrac{1}{2}$, donc $\left|\dfrac{q(u)}{u}\right|<\dfrac{1}{2u}$ et :

$$\left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x\frac{q(u)}{u}du\right|\leq\int_{\lfloor x\rfloor}^x\left|\frac{q(u)}{u}\right|du\leq\int_{\lfloor x\rfloor}^x\frac{du}{2u}=\left[\frac{1}{2}\ln u\right]_{\lfloor x\rfloor}^x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

Or, $0<\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$, donc $1\leq\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}<1+\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor}$ et quand $x\to+\infty$, on a $\lfloor x\rfloor\to+\infty$ donc $\dfrac{1}{\lfloor x\rfloor}\to 0$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\lfloor x\rfloor}=1$.

Par continuité de ln en 1, on obtient $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)=0$ et par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_{\lfloor x\rfloor}^{x}\frac{q(u)}{u}\,du=0}$$

La formule de Stirling permet d'écrire :

$$\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{e^n}{n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}\,.$$

Toujours grâce à la continuité de la fonction ln, on peut conclure avec la question **8** que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^{\lfloor x\rfloor}\frac{q(u)}{u}\,du=\lim_{\lfloor x\rfloor\to+\infty}\int_1^{\lfloor x\rfloor}\frac{q(u)}{u}\,du=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n}\frac{q(u)}{u}\,du=\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-1=\frac{\ln(2\pi)}{2}-1\,.$$

Avec $\lim_{x\to+\infty}\int_{\lfloor x\rfloor}^{x}\frac{q(u)}{u}\,du=0$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^{x}\frac{q(u)}{u}\,du=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^{\lfloor x\rfloor}\frac{q(u)}{u}\,du+\int_{\lfloor x\rfloor}^{x}\frac{q(u)}{u}\,du\right)=\frac{\ln(2\pi)}{2}-1+0=\frac{\ln(2\pi)}{2}-1\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{u}\,du \text{ converge et vaut } \frac{\ln(2\pi)}{2}-1\,.}$$

10. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $e^{-t}\in\,]0,1[$. D'après la question **1**, on a alors $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e^{-t})^n}{n}=-\ln(1-e^{-t})$.

Posons pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t)=\frac{1}{n}e^{-nt}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $t\mapsto e^{-t}$ l'est), avec :

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-nt}dt=\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{n^2}\,.$$

- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $t\mapsto-\ln(1-e^{-t})$, qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série $\sum\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|dt=\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

Alors, $t\mapsto-\ln(1-e^{-t})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\int_0^{+\infty}\left[-\ln(1-e^{-t})\right]dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Avec $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, on obtient bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\ln(1-e^{-t})\,dt=-\frac{\pi^2}{6}}$$

11. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \frac{x e^{-x} - 1 + e^{-x}}{x^2} = \frac{(x - e^x + 1)e^{-x}}{x^2}.$$

Or, par convexité de la fonction exponentielle, on a $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $g'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et ainsi, g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

Soit $f : (t,u) \mapsto \ln\left(\dfrac{1-e^{-tu}}{t}\right)$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]0,1\right]$.

Pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]0,1\right]$, on a $e^{-tu} < 1$ et $1 - tu \leq e^{-tu}$ (toujours par convexité de l'exponentielle).

Alors, $0 < \dfrac{1-e^{-tu}}{t} \leq u \leq 1$ et ainsi, *f* est bien définie et est négative sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]0,1\right]$.

- Pour tout $u \in \left]0,1\right]$, $f(t,u) \xrightarrow[t \to 0^+]{} \ln u$ (car $1 - e^{-x} \underset{x \to 0^+}{\sim} x$).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions $u \mapsto f(t,u)$ et $u \mapsto \ln u$ sont continues par morceaux sur $\left]0,1\right]$.
- Pour tout $(t,u) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]0,1\right]$, on a $tu \leq t$, donc $g(tu) \geq g(t)$, ce qui donne $\dfrac{1-e^{-tu}}{t} \geq \dfrac{1-e^{-t}}{t} u$, d'où :

$$\left|f(t,u)\right| = -f(t,u) \leq -\ln\left(\frac{1-e^{-t}}{t} u\right) = -\ln\big(g(t)\big) - \ln u.$$

Comme $-\ln g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\left]0,1\right]$, on a alors pour tout $(t,u) \in \left]0,1\right] \times \left]0,1\right]$:

$$\left|f(t,u)\right| \leq -\ln\big(g(1)\big) - \ln u.$$

Et la fonction $u \mapsto -\ln\big(g(1)\big) - \ln u$ est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0,1\right]$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, pour tout $t \in \left]0,1\right]$, $u \mapsto f(t,u)$ est intégrable sur $\left]0,1\right]$ et on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) du = \int_0^1 \lim_{t \to 0^+} \left[\ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\right] du = \int_0^1 \ln u \, du = \left[u \ln u - u\right]_0^1 = -1.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) du \xrightarrow[t \to 0^+]{} -1}$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$u_k(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\, q(u)}{e^{tu} - 1} du & \text{quand } t > 0 \\ \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u} du & \text{quand } t = 0 \end{cases}$$

Posons $J=\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]$ et pour tout $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times J$:

$$h(t,u)=\begin{cases}\dfrac{t\,q(u)}{e^{tu}-1} & \text{quand } t>0\\ \dfrac{q(u)}{u} & \text{quand } t=0\end{cases}$$

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $u\mapsto h(t,u)$ est continue par morceaux sur J.
- Pour tout $u\in J$, $t\mapsto h(t,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues et $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}=\frac{q(u)}{u}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{tu}{e^{tu}-1}=\frac{q(u)}{u}\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h}{e^h-1}=\frac{q(u)}{u}$ donc $t\mapsto h(t,u)$ est continue en 0).
- Par convexité de la fonction exponentielle, on a $1+tu\le e^{tu}$ pour tout $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times J$.

  Avec $|q(u)|\le\frac{1}{2}$ établi dans la question **7**, on a pour tout $(t,u)\in\mathbb{R}_+\times J$:

$$|h(t,u)|=\frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\le\frac{1}{2u}.$$

  Et la fonction $u\mapsto\frac{1}{2u}$ est continue par morceaux et intégrable sur $J=\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]$ (car $k>0$).

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $u\mapsto h(t,u)$ est intégrable sur J (ce qui était clair car la fonction est continue par morceaux sur le segment J et $t\mapsto\int_{k/2}^{(k+1)/2}h(t,u)\,du$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Or, cette fonction n'est autre que la fonction u_k, donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_k \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

13. Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$ fixé dans cette question.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $u\in\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right[$:

- si $k=2p$ est pair, $p\le u<p+\frac{1}{2}$, donc $\lfloor u\rfloor=p=\frac{k}{2}$ et $q(u)=u-\frac{k+1}{2}<0$;
- si $k=2p+1$ est impair, $p+\frac{1}{2}\le u<p+1$, donc $\lfloor u\rfloor=p=\frac{k-1}{2}$ et $q(u)=u-\frac{k}{2}\ge 0$.

Ainsi, pour tout $u\in\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right[$:

$$q(u)=\begin{cases}-|q(u)| & \text{quand } k \text{ est pair}\\ |q(u)| & \text{quand } k \text{ est impair}\end{cases}$$

Alors, on peut écrire :

$$u_k(t)=\begin{cases}-\displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du & \text{quand } k \text{ est pair}\\ \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}du & \text{quand } k \text{ est impair}\end{cases}$$

Et comme pour tout $u\in\left[\dfrac{k}{2},\dfrac{k+1}{2}\right]$, on a $\dfrac{t}{e^{tu}-1}>0$, donc $\displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}du\geq 0$, on obtient dans les deux cas :

$$\boxed{|u_k(t)|=\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}du}$$

On vient aussi de voir que $u_k(t)=\begin{cases}-|u_k(t)| & \text{quand } k \text{ est pair}\\ \ |u_k(t)| & \text{quand } k \text{ est impair}\end{cases}$, soit pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_k(t)=(-1)^{k+1}|u_k(t)|}$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, en effectuant le changement de variable $v=k+1-u$, on a :

$$|u_{k+1}(t)|=\int_{(k+1)/2}^{(k+2)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}du=-\int_{(k+1)/2}^{k/2}\frac{t\,|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}dv=\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}dv\,.$$

Et d'après la question **6**, la fonction $|q|$ est paire et 1-périodique, donc $|q(k+1-v)|=|q(-v)|=|q(v)|$ et en renommant u la variable muette dans l'intégrale, on a :

$$|u_{k+1}(t)|=\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{t(k+1-u)}-1}du\,.$$

Or, pour tout $u\in\left[\dfrac{k}{2},\dfrac{k+1}{2}\right]$, on a $(k+1-u)-u=2\left(\dfrac{k+1}{2}-u\right)\geq 0$, donc $k+1-u\geq u$ et avec $t>0$:

$$\frac{t\,|q(u)|}{e^{t(k+1-u)}-1}\leq\frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}.$$

Alors :

$$|u_{k+1}(t)|=\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{t(k+1-u)}-1}du\leq\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}du=|u_k(t)|\,.$$

Ainsi, la suite $\left(|u_k(t)|\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tous $t,u\in\mathbb{R}_+^*$, on a $|q(u)|\leq\dfrac{1}{2}$ (vu dans la question **7**) et $0<\dfrac{tu}{e^{tu}-1}\leq 1$ (car $e^{tu}-1\geq tu$ par convexité de la fonction exponentielle), donc :

$$|u_k(t)|=\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}du=\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{tu}{e^{tu}-1}\,\frac{|q(u)|}{u}du\leq\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{du}{2u}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{k+1}{2}\right)-\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Et par concavité de la fonction ln, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\leq\dfrac{1}{k}$ et donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$|u_k(t)|\leq\frac{1}{2k}\,.$$

Par comparaison, ceci prouve que la suite $\left(|u_k(t)|\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle.

Finalement, la suite $\left(|u_k(t)|\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle, donc la série alternée $\sum u_k(t)$ vérifie le critère spécial des séries alternées, ce qui permet conclure qu'elle converge est son reste d'ordre $n-1$ est majoré en valeurs absolues par son premier terme, soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n}^{+\infty}u_k(t)\right|\le|u_n(t)|$ et comme on vient de voir que $|u_n(t)|\le\dfrac{1}{2n}$, on obtient bien pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left|\sum_{k=n}^{+\infty}u_k(t)\right|\le\frac{1}{2n}}$$

14. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$, le résultat précédent (admis en $t=0$) permet de conclure à la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum u_k$. De plus, d'après la question **12**, u_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Ceci permet de conclure que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}u_k$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0 entre autres.

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty}u_k(t)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}u_k(t)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{k/2}^{(k+1)/2}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du=\lim_{n\to+\infty}\int_1^{(n+1)/2}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du=\int_1^{+\infty}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du\,.$$

Et, de la même façon, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}u_k(0)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{u}du$ et, d'après la question **9**, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{u}du=\frac{\ln(2\pi)}{2}-1$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{t\to0^+}\int_1^{+\infty}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du=\frac{\ln(2\pi)}{2}-1}$$

15. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du=\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\left(u-\lfloor u\rfloor-\frac{1}{2}\right)du$$

Soit un réel $A\ge1$.

- $\displaystyle\int_1^A\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}du=\left[\ln(1-e^{-tu})\right]_1^A=\ln(1-e^{-tA})-\ln(1-e^{-t})\xrightarrow[A\to+\infty]{}-\ln(1-e^{-t})$ donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}du=-\ln(1-e^{-t})\,.$$

- Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^A\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}u\,du&=\left[u\ln(1-e^{-tu})\right]_1^A-\int_1^A\ln(1-e^{-tu})\,du\\&=A\ln(1-e^{-tA})-\ln(1-e^{-t})-\int_1^A\ln(1-e^{-tu})\,du\end{aligned}.$$

Or, $\ln(1-e^{-tu})\underset{u\to+\infty}{\sim}-e^{-tu}$ et $\int_1^{+\infty}e^{-tu}\,du$ converge, donc $\int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})\,du$ converge.

Et $A\ln(1-e^{-tA})\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$ par croissances comparées (car $A\ln(1-e^{-tA})\underset{u\to+\infty}{\sim}-Ae^{-tA}$).

Ainsi, $\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}u\,du$ converge et :

$$\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}u\,du=-\ln(1-e^{-t})-\int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})\,du\,.$$

Comme $\int_1^{+\infty}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du$ converge (d'après la question précédente), on en déduit que $\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du$ converge et :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}du&=\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}u\,du-\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}du\\&=-\ln(1-e^{-t})-\int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})\,du-\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t})\\&=-\ln(1-e^{-t})-\int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})\,du-\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t})\\&=-\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t})-\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du-\int_1^{+\infty}\ln(1-e^{-tu})\,du\end{aligned}$$

Il reste donc à prouver que $\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du=\ln P(e^{-t})$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du&=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}n\,du\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}n\int_n^{n+1}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}du=\sum_{n=1}^{+\infty}n\Big[\ln(1-e^{-tu})\Big]_n^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[n\ln(1-e^{-(n+1)t})-n\ln(1-e^{-nt})\Big]\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n+1-1)\ln(1-e^{-(n+1)t})-n\ln(1-e^{-nt})\Big]\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\Big[(n+1)\ln(1-e^{-(n+1)t})-n\ln(1-e^{-nt})\Big]-\ln(1-e^{-(n+1)t})\Big)\end{aligned}$$

Or, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N}\Big[(n+1)\ln(1-e^{-(n+1)t})-n\ln(1-e^{-nt})\Big]=(N+1)\ln(1-e^{-(N+1)t})-\ln(1-e^{-t})\,.$$

Et comme plus haut, on a $(N+1)\ln(1-e^{-(N+1)t})\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n+1)\ln(1-e^{-(n+1)t})-n\ln(1-e^{-nt})\Big]=-\ln(1-e^{-t})\,.$$

Ceci implique que la série $\sum\ln(1-e^{-(n+1)t})$ converge et avec une réindexation, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}}\lfloor u\rfloor du&=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[(n+1)\ln(1-e^{-(n+1)t})-n\ln(1-e^{-nt})\Big]-\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-e^{-(n+1)t})\\&=-\ln(1-e^{-t})-\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1-e^{-nt})=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-e^{-nt})\end{aligned}$$

D'après la question **5**, on a alors $\int_1^{+\infty} \frac{t\,e^{-tu}}{1-e^{-tu}} \lfloor u \rfloor du = \ln P(e^{-t})$ et finalement, on obtient bien :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1} du = -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du}$$

16. D'après le résultat précédent, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln P(e^{-t}) = -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1} du - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du\,.$$

D'après la question **12**, on a $\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) du \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1$. Or :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right) du = \int_0^1 \left[\ln(1-e^{-tu}) - \ln t\right] du = \int_0^1 \ln(1-e^{-tu})\,du - \ln t\,.$$

Ceci veut dire que $\int_0^1 \ln(1-e^{-tu})\,du$ converge avec :

$$\int_0^1 \ln(1-e^{-tu})\,du = \ln t - 1 + \underset{t\to 0^+}{o}(1)\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du &= \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du - \int_0^1 \ln(1-e^{-tu})\,du\\ &= \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du - \ln t + 1 + \underset{t\to 0^+}{o}(1)\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $v = tu$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du = \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-v})\frac{1}{t}dv = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-v})\,dv\,.$$

Et, d'après la question **10**, $\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-v})\,dv = -\frac{\pi^2}{6}$, donc :

$$\int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,du = -\frac{\pi^2}{6t} - \ln t + 1 + \underset{t\to 0^+}{o}(1) \qquad \textbf{(1)}$$

D'après la question **14** :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1} du = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + \underset{t\to 0^+}{o}(1) \qquad \textbf{(2)}$$

Enfin :

$$\ln(1-e^{-t}) = \ln\big(t + \underset{t\to 0^+}{o}(t)\big) = \ln t + \ln\big(1 + \underset{t\to 0^+}{o}(1)\big) = \ln t + \underset{t\to 0^+}{o}(1) \qquad \textbf{(3)}$$

En utilisant **(1)**, **(2)** et **(3)** dans la relation au début de la question, on obtient :

$$\ln P(e^{-t}) = -\frac{1}{2}\ln t - \frac{\ln(2\pi)}{2} + 1 + \frac{\pi^2}{6t} + \ln t - 1 + \underset{t\to 0^+}{o}(1)\,.$$

Soit :

$$\boxed{\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{1}{2}\ln t - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1)}$$

C. Développement de P en série entière

17. On fixe $n\in\mathbb{N}$.

Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, on a $P_{n,N}=\left\{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N \setminus \sum_{k=1}^{N}ka_k=n\right\}$.

On a $(n,0,\dots,0)\in P_{n,N}$ donc :

$$\boxed{P_{n,N}\neq\varnothing}$$

Pour tout $(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}$ et tout $k\in[\![1,N]\!]$:

$$0\leq a_k=\frac{1}{k}ka_k\leq\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{N}ia_i=\frac{n}{k}\leq n.$$

Donc, $(a_1,\dots,a_N)\in[\![0,n]\!]^N$ et ainsi :

$$\boxed{P_{n,N}\subset[\![0,n]\!]^N}$$

Comme $[\![0,n]\!]^N$ est fini (de cardinal $(n+1)^N$) et $P_{n,N}\subset[\![0,n]\!]^N$, $P_{n,N}$ est fini et donc $p_{n,N}$ existe et comme $P_{n,N}$ est non vide, on a $1\leq p_{n,N}\leq(n+1)^N$.

Pour tout $(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}$, on a $a_1,\dots,a_N,0\in\mathbb{N}$ et $\sum_{k=1}^{N}ka_k+(N+1)\times 0=n$, donc $(a_1,\dots,a_N,0)\in P_{n,N+1}$.

Ainsi, $\left\{(a_1,\dots,a_N,0)\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}\right\}\subset P_{n,N+1}$ donc :

$$\operatorname{Card}\left\{(a_1,\dots,a_N,0)\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}\right\}\leq p_{n,N+1}.$$

Comme $(a_1,\dots,a_N)\mapsto(a_1,\dots,a_N,0)$ est bijective de $P_{n,N}$ dans $\left\{(a_1,\dots,a_N,0)\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}\right\}$, on a :

$$\operatorname{Card}\left\{(a_1,\dots,a_N,0)\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}\right\}=p_{n,N}.$$

Et ainsi, $p_{n,N}\leq p_{n,N+1}$, donc :

$$\boxed{\text{La suite } \left(p_{n,N}\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

- Si $n=0$, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et tout $(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N$, on a $\sum_{k=1}^{N}ka_k=0$ si et seulement si $a_1=\dots=a_N=0$. Ainsi, $P_{n,N}=\left\{(0,\dots,0)\in\mathbb{N}^N\right\}$ et $p_{n,N}=1$: la suite $\left(p_{0,N}\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est constante à partir du rang $1=\max(0,1)$.
- Si $n\geq 1$, soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $N\geq n+1$. Posons :

$$A=\left\{(a_1,\dots,a_n,0,\dots,0)\in\mathbb{N}^N\setminus(a_1,\dots,a_n)\in P_{n,n}\right\}.$$

Comme plus haut, on a :

$$\underline{A\subset P_{n,N}}.$$

Et pour tout $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$, s'il existe $p \in [\![n+1, N]\!]$ tel que $a_p \neq 0$, on a $a_p \geq 1$ et donc :

$$\sum_{k=1}^{N} k a_k \geq p a_p \geq p > n .$$

Ceci est absurde car $\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$.

Ainsi, $a_p = 0$ pour tout $p \in [\![n+1, N]\!]$ et $(a_1, \dots, a_N) \in A$. Ceci prouve que :

$$\underline{P_{n,N} \subset A}.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{P_{n,N} = A}.$$

Or, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$ est bijective de $P_{n,n}$ dans A, donc :

$$p_{n,N} = \operatorname{Card} P_{n,N} = \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} P_{n,n} = p_{n,n} .$$

Ainsi, la suite $(p_{n,N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est constante à partir du rang $n = \max(n,1)$.

Dans les deux cas :

$$\boxed{\text{La suite } (p_{n,N})_{N \in \mathbb{N}^*} \text{ est constante à partir du rang } \max(n,1).}$$

18. Pour tout $z \in D$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|z^{N+1}\right| = |z|^{N+1} < 1$ et :

$$\frac{1}{1-z^{N+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{N+1})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(N+1)} .$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, posons :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n,N} = \begin{cases} 1 & \text{si } N+1 \text{ divise } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

On a alors :

$$\boxed{\forall\, z \in D,\ \frac{1}{1-z^{N+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n}$$

Prouvons par récurrence sur N que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$ pour tout $z \in D$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n,1} = \{a_1 \in \mathbb{N} \setminus a_1 = n\} = \{n\}$, donc $p_{n,1} = 1$.

  Comme pour tout $z \in D$, $\sum z^n$ converge, on peut écrire :

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \prod_{n=1}^{1} \frac{1}{1-z^n} .$$

  La relation est donc vraie au rang $N = 1$.

- Supposons la relation vraie à un rang $N \in \mathbb{N}^*$, soit pour tout $z \in D$, $\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$ (ce qui suppose, entre autres, la convergence de la série $\sum p_{n,N} \alpha^n$ pour tout $\alpha \in D$).

Alors :

$$\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^n}=\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}\right)\left(\frac{1}{1-z^{N+1}}\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)\left(\frac{1}{1-z^{N+1}}\right).$$

Or, on a vu que $\dfrac{1}{1-z^{N+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,N}z^n$ et comme $|z|<1$, la série $\sum a_{n,N}z^n$ est absolument convergente.

De plus, on a $|z|\in D$, donc par hypothèse de récurrence, la série $\sum p_{n,N}|z|^n=\sum\left|p_{n,N}z^n\right|$ converge, donc la série $\sum p_{n,N}z^n$ est absolument convergente.

On peut alors utiliser le produit de Cauchy pour écrire :

$$\prod_{n=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^n}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)\left(\frac{1}{1-z^{N+1}}\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{n-k,N}u_k\right)z^n \quad \textbf{(1)}$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}P_{n,N+1}&=\left\{(a_1,\dots,a_N,a_{N+1})\in\mathbb{N}^{N+1}\setminus\sum_{k=1}^{N+1}ka_k=n\right\}\\&=\left\{(a_1,\dots,a_N,a_{N+1})\in\mathbb{N}^{N+1}\setminus(N+1)a_{N+1}\le n\text{ et }(a_1,\dots,a_N)\in P_{n-(N+1)a_{N+1},N}\right\}\end{aligned}$$

Si on pose $A_{N+1}=[\![0,n]\!]\bigcap(N+1)\mathbb{N}$, autrement dit, A_{N+1} est l'ensemble des multiples de $N+1$ compris entre 0 et n, on peut écrire :

$$P_{n,N+1}=\bigcup\nolimits_{k\in A_{N+1}}\left\{(a_1,\dots,a_N,k)\in\mathbb{N}^{N+1}\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n-k,N}\right\}.$$

L'application $(a_1,\dots,a_N,k)\mapsto(a_1,\dots,a_N)$ est bijective de $\left\{(a_1,\dots,a_N,k)\in\mathbb{N}^{N+1}\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n-k,N}\right\}$ dans $P_{n-k,N}$, donc $\operatorname{Card}\left\{(a_1,\dots,a_N,k)\in\mathbb{N}^{N+1}\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n-k,N}\right\}=\operatorname{Card}P_{n-k,N}=p_{n-k,N}$. De plus, l'union ci-dessus est disjointe, donc :

$$p_{n,N+1}=\operatorname{Card}P_{n,N+1}=\sum_{k\in A_{N+1}}\operatorname{Card}\left\{(a_1,\dots,a_N,k)\in\mathbb{N}^{N+1}\setminus(a_1,\dots,a_N)\in P_{n-k,N}\right\}=\sum_{k\in A_{N+1}}p_{n-k,N}$$

Enfin, avec la suite u définie plus haut, on a $k\in A_{N+1}$ si et seulement si $k\in[\![0,n]\!]$ et $u_k=1$. Ainsi :

$$p_{n,N+1}=\sum_{k=0}^{n}p_{n-k,N}u_k\,.$$

La relation **(1)** devient alors $\prod_{n=1}^{N+1}\dfrac{1}{1-z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N+1}z^n$ et donc la relation est vraie au rang $N+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour $N\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } N\in\mathbb{N}^* \text{ et tout } z\in D,\ \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\,.}$$

19. Soient $\ell\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$.

Soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $N>\ell$. On a vu que $p_{0,N}=p_0=1$ et $p_{n,N}=p_n$ pour tout $N\ge\max(n,1)$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}x^n=\sum_{n=0}^{\ell}p_nx^n+\sum_{n=\ell+1}^{+\infty}p_{n,N}x^n\,.$$

Comme tous les termes sont positifs, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} x^n .$$

Donc, d'après la question précédente, on a :

$$\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-x^n} .$$

Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > \ell$, donc on peut faire tendre N vers + ∞, et d'après la question **5**, $\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-x^n} \right) = P(x)$ car $x \in [0,1[\subset D$, donc, pour tous $\ell \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x)}$$

L'inégalité précédente peut se récrire $\sum_{n=0}^{\ell} p_n |z|^n \leq P(|z|)$ pour tout $z \in D$. Ainsi, la suite $\left(\sum_{n=0}^{\ell} p_n |z|^n \right)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est majorée par $P(|z|)$ et est croissante car la série $\sum p_n |z|^n$ est à termes positifs. Ceci permet de conclure que la série $\sum p_n |z|^n$ converge et donc, si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n z^n$, on a $\underline{R \geq 1}$.

Par ailleurs, on a vu que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n,N} \geq 1$, donc $p_n \geq 1$ et comme le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1, on a $\underline{R \leq 1}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum p_n z^n \text{ est } R = 1.}$$

20. Soit $z \in D$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, les séries $\sum p_n z^n$ et $\sum p_{n,N} z^n$ convergent.

On a vu que $p_{0,N} = p_0 = 1$ et $p_{n,N} = p_n$ pour tout $1 \leq n \leq N$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(p_n - p_{n,N} \right) z^n .$$

D'après la question **17**, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $\left(p_{n,N} \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers naturels croissante et stationnaire sur p_n, donc $0 \leq p_{n,N} \leq p_n$ et ainsi, pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq p_n - p_{n,N} \leq p_n .$$

Alors, $0 \leq \left(p_n - p_{n,N} \right) |z|^n \leq p_n |z|^n$ et comme $\sum p_n z^n$ converge absolument, la série $\sum \left(p_n - p_{n,N} \right) z^n$ converge absolument aussi et on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(p_n - p_{n,N} \right) z^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(p_n - p_{n,N} \right) |z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n .$$

Comme $\sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n$ est le reste d'une série convergente, on a $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n = 0$.

Alors, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_nz^n-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)=0$, soit :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n .$$

Or, d'après les questions **5** et **18**, $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)=\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}\right)=P(z)$ et ainsi, pour tout $z\in D$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n=P(z)}$$

21. En posant $z=e^{-t}e^{i\theta}$ avec $t\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in[-\pi,\pi]$, on a $|z|=e^{-t}<1$, donc $z\in D$ et avec le résultat précédent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(e^{-t}e^{i\theta})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}p_ne^{-nt}e^{in\theta}=P(e^{-t}e^{i\theta}).$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}=e^{-in\theta}P(e^{-t}e^{i\theta})$ et pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\left|p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}\right|=p_ke^{-kt}.$$

Comme $\sum p_ke^{-kt}$ converge (car $e^{-t}\in D$), la série de fonctions $\sum\phi_k$ avec $\phi_k:\theta\mapsto p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi,\pi]$ et, comme les ϕ_k sont continues, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\phi_k$ est continue et :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_k(\theta)\right)d\theta=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_k(\theta)\,d\theta=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta=\sum_{k=0}^{+\infty}p_ke^{-kt}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta .$$

Or, si $k\neq n$, on a $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta=\left[\frac{1}{i(k-n)}e^{i(k-n)\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$ et si $k=n$, $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)\theta}\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=2\pi$, donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\phi_k(\theta)\right)d\theta=2\pi\,p_ne^{-nt} .$$

Par ailleurs, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\phi_k(\theta)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}p_ke^{-kt}e^{i(k-n)\theta}=e^{-in\theta}P(e^{-t}e^{i\theta})$, donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}P(e^{-t}e^{i\theta})\,d\theta=2\pi\,p_ne^{-nt} .$$

Avec $P(e^{-t})\neq0$, donc $P(e^{-t})\neq0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{P(e^{-t})}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}P(e^{-t}e^{i\theta})\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\,d\theta=\frac{2\pi\,p_n}{e^{nt}P(e^{-t})}.$$

Soit, pour tous $t\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{p_n=\frac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\,d\theta}$$

D. Contrôle de P

22. Soient $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On a $x\in D$ et $xe^{i\theta}\in D$, donc, d'après la question **3**, on peut écrire :

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right|=\left|\frac{e^{L(xe^{i\theta})}}{e^{L(x)}}\right|=\left|e^{L(xe^{i\theta})-L(x)}\right|=e^{\operatorname{Re}\left(L(xe^{i\theta})-L(x)\right)}.$$

Et on a :

$$\operatorname{Re}\left(L(xe^{i\theta})-L(x)\right)=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(xe^{i\theta})^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}(e^{in\theta}-1)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\left(\cos(n\theta)-1\right).$$

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{x^n}{n}\left(\cos(n\theta)-1\right)\leq 0$, on a :

$$\operatorname{Re}\left(L(xe^{i\theta})-L(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\left(\cos(n\theta)-1\right)\leq\frac{x^1}{1}\left(\cos(\theta)-1\right)=-x\left(1-\cos\theta\right)$$

Ainsi, $e^{\operatorname{Re}\left(L(xe^{i\theta})-L(x)\right)}\leq e^{-x(1-\cos\theta)}$ et donc on a bien pour tous $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right|\leq e^{-(1-\cos\theta)x}}$$

D'après la question **5**, $P(x)=\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^n}\right)$ et $P(xe^{i\theta})=\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-(xe^{i\theta})^n}\right)$ car $x\in D$ et $xe^{i\theta}\in D$.

Alors :

$$\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}=\frac{\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-(xe^{i\theta})^n}\right)}{\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^n}\right)}=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-(xe^{i\theta})^n}}{\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-x^n}}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-(xe^{i\theta})^n}\right)$$

Et, par continuité du module :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|=\lim_{N\to+\infty}\left(\left|\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-(xe^{i\theta})^n}\right|\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right|\right).$$

Or, quand $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$, on a $x^n\in[0,1[$ et $n\theta\in\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc :

$$\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right|\leq e^{-(1-\cos n\theta)x^n}.$$

Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right|\leq\prod_{n=1}^{N}e^{-(1-\cos n\theta)x^n}=e^{-\sum_{n=1}^{N}(1-\cos n\theta)x^n}.$$

Enfin :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(1-\cos n\theta\right)x^n=\sum_{n=0}^{N}\left(1-\cos n\theta\right)x^n=\sum_{n=1}^{N}x^n-\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}x^ne^{in\theta}\right).$$

Et comme les séries géométriques $\sum x^n$ et $\sum x^n e^{in\theta}$ convergent, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos n\theta)\,x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\cos n\theta)\,x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n e^{in\theta}\right)=\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right).$$

Et :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|=\lim_{N\to+\infty}\left(\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right|\right)\le e^{-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos n\theta)x^n}.$$

Soit pour tous $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|\le e^{-\frac{1}{1-x}+\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)}}$$

23. Soient $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)&=\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-x\cos\theta-i\,x\sin\theta}\right)=\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1-x\cos\theta+i\,x\sin\theta}{(1-x\cos\theta)^2+x^2\sin^2\theta}\right)\\&=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2\cos^2\theta+x^2\sin^2\theta}=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\\&=\frac{1-2x\cos\theta+x^2-(1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)(1-2x\cos\theta+x^2)}=\frac{1-2x\cos\theta+x^2-1+x+x\cos\theta-x^2\cos\theta}{(1-x)(1-2x+x^2+2x-2x\cos\theta)}\\&=\frac{x^2-x^2\cos\theta+x-x\cos\theta}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}=\frac{(x^2+x)(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}\end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{1-\cos\theta}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}\ge 0$ et $x^2+x\ge x$, on obtient bien pour tous $x\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\ge\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}}$$

Ceci donne :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|\le\exp\left(-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}\right).$$

On suppose que $x\ge\dfrac{1}{2}$.

- si $(1-x)^2\le x(1-\cos\theta)$, alors $(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\le 3x(1-\cos\theta)$ et :

  $$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}\ge\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big(3x(1-\cos\theta)\big)}=\frac{1}{3(1-x)}.$$

  Et donc $\left|\dfrac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|\le\exp\left(-\dfrac{1}{3(1-x)}\right).$

- si $(1-x)^2 \geq x(1-\cos\theta)$, alors $(1-x)^2+2x(1-\cos\theta) \leq 3(1-x)^2$ et avec $x \geq \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)3(1-x)^2} = \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^3} \geq \frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}.$$

Donc $\left|\dfrac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\dfrac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right)$.

Ainsi, si $x \geq \dfrac{1}{2}$, on a bien :

$$\boxed{\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).}$$

24. Posons $f(\theta) = \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ pour $\theta \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Comme la fonction cosinus est paire et développable en série entière sur $\mathbb{R}$, *f* est paire et développable en série entière sur $[-\pi,\pi]$ (qui est symétrique par rapport à 0), avec pour $\theta \in [-\pi,\pi]$:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\theta^{2n}.$$

La fonction *f* est alors dérivable sur $[-\pi,\pi]$ avec $f'(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+2)!}\theta^{2n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(2n)!}\theta^{2n-1}$, donc :

$$2\theta f'(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(2n)!}\theta^{2n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2k+2}\frac{1}{\left(2(2k+1)\right)!}\theta^{2(2k+1)} + \frac{1}{2k+3}\frac{1}{\left(2(2k+2)\right)!}\theta^{2(2k+2)}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^2 - 2(4k+3)(2k+3)}{2k+3}\frac{\theta^{2(2k+1)}}{(4k+4)!}$$

Et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2(4k+3)(2k+3) \geq 18 \geq \pi^2 \geq \theta^2$, donc $2\theta f'(\theta) \leq 0$, ceci veut dire que $f' \leq 0$ sur $[0,\pi]$ et donc que *f* est décroissante sur cet intervalle. Alors, pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $f(\theta) \geq f(\pi) = \dfrac{2}{\pi^2}$ et par parité, on a $f(\theta) \geq \dfrac{2}{\pi^2}$ pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$. Avec $\theta^2 \geq 0$, ceci donne :

$$\boxed{\forall\, \theta \in [-\pi,\pi],\ 1-\cos\theta \geq \frac{2}{\pi^2}\theta^2.}$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [-\pi,\pi]$. On a $e^{-t} \in \left]0,1\right[$ et d'après la question précédente, si $e^{-t} \geq \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $t \leq \ln 2$, on a :

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-e^{-t})^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right).$$

- Par convexité de la fonction exponentielle, on a $0<1-e^{-t}\leq t$ et donc avec $1-\cos\theta\geq\frac{2}{\pi^2}\theta^2$, on obtient :
$$-\frac{1-\cos\theta}{6(1-e^{-t})^3}\leq-\frac{1-\cos\theta}{6t^3}\leq-\frac{2}{6\pi^2}\frac{\theta^2}{t^3}=-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2.$$
Et donc :
$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq\exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-e^{-t})^3}\right)\ \Rightarrow\ \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq\exp\left(-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2\right).$$
- Toujours avec $0<1-e^{-t}\leq t$, on a pour $\theta\in[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$:
$$-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\leq-\frac{1}{3t}=-\frac{1}{3|\theta|^{2/3}}\frac{|\theta|^{2/3}}{t}\leq-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\frac{|\theta|^{2/3}}{t}=-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}.$$
Et, donc :
$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq\exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right)\ \Rightarrow\ \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq\exp\left(-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}\right).$$

Finalement, pour tout $t\in\left]0,\ln 2\right]$ et tout $\theta\in[-\pi,\pi]$, on a :
$$\boxed{\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq e^{-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}\quad\text{ou}\quad\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq e^{-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}}$$

25. D'après la question précédente, pour tout $t\in\left]0,\ln 2\right]$ et tout $\theta\in[-\pi,\pi]$, on a :
$$\left|e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq e^{-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}\quad\text{ou}\quad\left|e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|\leq e^{-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}.$$
Donc, avec $\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|d\theta$, on a pour tout $t\in\left]0,\ln 2\right]$:
$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}d\theta\quad\text{ou}\quad\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}d\theta.$$
Par parité, on a :
$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}d\theta=2\int_{0}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}d\theta\quad\text{et}\quad\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}d\theta=2\int_{0}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}}d\theta.$$
En effectuant le changement de variable $u=\frac{t^{-3/2}\theta}{\pi}$ dans les deux intégrales, on obtient :
$$\int_{0}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^2}\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}d\theta=\pi t^{3/2}\int_0^{t^{-3/2}}e^{-\frac{u^2}{3}}du\quad\text{et}\quad\int_{0}^{\pi}e^{-\frac{1}{3\pi^{2/3}}\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}d\theta=\pi t^{3/2}\int_0^{t^{-3/2}}e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}d\theta.$$
Or, par croissances comparées, on a $e^{-\frac{u^2}{3}}\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et $e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}\underset{u\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc les intégrales $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{3}}du$ et $\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}du$ convergent.

De plus, pour tout $t\in\,]0,\ln 2]$:

$$\int_0^{t^{-3/2}} e^{-\frac{u^2}{3}}du \le \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{3}}du \quad \text{et} \quad \int_0^{t^{-3/2}} e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}du \le \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}du\,.$$

Alors, pour tout $t\in\,]0,\ln 2]$:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta\right| \le \pi t^{3/2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{3}}du \quad \text{ou} \quad \left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta\right| \le \pi t^{3/2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}du\,.$$

Finalement, en posant $M=\max\left(\pi\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{3}}du,\pi\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^{2/3}}{3}}du\right)$, on obtient pour tout $t\in\,]0,\ln 2]$:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta\right| \le M\,t^{3/2}$$

Ceci permet de conclure que pour tout $t\in\,]0,\ln 2]$:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta = \underset{t\to 0^+}{O}\left(t^{3/2}\right)}$$

E. Conclusion

26. D'après la question **21**, pour tous $t\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$, $p_n=\dfrac{e^{nt}P(e^{-t})}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}d\theta$.

Ce résultat est vrai quel que soit $t\in\mathbb{R}_+^*$ choisi à n fixé. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut donc prendre $t=\dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$ et :

$$p_n=\frac{e^{n\pi/\sqrt{6n}}P(e^{-\pi/\sqrt{6n}})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P(e^{-\pi/\sqrt{6n}}e^{i\theta})}{P(e^{-\pi/\sqrt{6n}})}d\theta=\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P(e^{-\pi/\sqrt{6n}})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P(e^{-\pi/\sqrt{6n}}e^{i\theta})}{P(e^{-\pi/\sqrt{6n}})}d\theta\,.$$

Si $n\ge\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{\ln 2}\right)^2$, on a $t\in\,]0,\ln 2]$ et, avec $t^{3/2}=\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{3/2}\dfrac{1}{n^{3/4}}$, le résultat de la question précédente donne :

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\frac{P(e^{-\pi/\sqrt{6n}}e^{i\theta})}{P(e^{-\pi/\sqrt{6n}})}d\theta=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right).$$

D'où :

$$\frac{p_n}{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}})}=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right).$$

D'après la question **16**, on a :

$$\begin{aligned}\ln P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}})&=\frac{\pi^2}{6\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)-\frac{\ln(2\pi)}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\\&=\pi\sqrt{\frac{n}{6}}-\frac{1}{4}\ln n-\frac{1}{4}\ln 6+\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{\ln(2\pi)}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

Donc, en posant $K = e^{-\frac{1}{4}\ln 6 + \frac{1}{2}\ln \pi - \frac{\ln(2\pi)}{2}}$, on a :

$$e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}) \underset{n\to+\infty}{\sim} K\, e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}} - \frac{1}{4}\ln n} = K\, e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} n^{-\frac{1}{4}} = K\, e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} n^{-\frac{1}{4}}$$

Et donc $\dfrac{p_n}{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} n^{-\frac{1}{4}}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)$, soit :

$$\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{n}\right)}$$