DM de Mathématiques n° 7

Soient A et B deux variables aléatoires suivant toute deux une loi géométrique de paramètre p pour A et q pour B, avec $p, q \in \left]0,1\right[$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ -2B & -3A & -2B \\ 0 & B & A \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que M est une variable aléatoire.
2) Déterminer la probabilité que M soit inversible.

On suppose dans les questions 3 à 6 que A et B sont indépendantes.

3) a. Déterminer la probabilité que M soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   b. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

   c. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4) Calculer la probabilité que toutes les valeurs propres de M soient des entiers divisibles par A.
5) Calculer la probabilité que le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de M.
6) Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection, de symétrie.

On ne suppose plus que A et B sont indépendantes, ni que A suit une loi géométrique, mais est toujours à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. La variable B suit toujours une loi géométrique de paramètre $q \in \left]0,1\right[$ et il existe un réel $r \in \left]0,1\right[$ tel que pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, $P_{(B=j)}\left(A = i\right) = (1 - r^j)\, r^{j(i-1)}$.

7) Montrer qu'à $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, la formule ci-dessus définit bien une loi de probabilité $P_{(B=j)}$.
8) Déterminer la loi de A.
9) Reprendre alors la question 3.