Révisions d'algèbre de 1ère année

Dans tous les exercices, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**.**

Exercice 1

Soient F, G, H et K des sous-espaces de E.

1) On pose $A = F \cap (G + H)$ et $B = (F \cap G) + (F \cap H)$.

   a. Justifier que A et B sont des sous-espaces de E, puis montrer que $B \subset A$ et que l'inclusion peut être stricte.

   b. Montrer que si F contient G ou H, alors $A = B$.

   c. Prouver que $B = F \cap (G + (F \cap H))$.

2) Etudier les inclusions entre $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

3) On suppose que $F \cap G = F + H$ et $F \cap H = F + G$. Montrer que $F = G = H$.

4) On suppose que $F \oplus G = H \oplus K$, $F \subset H$ et $G \subset K$. Montrer que $F = H$ et $G = K$.

Exercice 2

On suppose ici que E est de dimension finie. Montrer que deux sous-espaces de E possèdent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont la même dimension.

Exercice 3

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \circ g - g \circ f^n = n\, f^{n-1}$.

2) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre. En déduire que E n'est pas de dimension finie.

3) Vérifier que pour $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$ vérifient les hypothèses.

Dans tous les exercices suivants, E est de dimension finie.

Exercice 4

Soit f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $E = \ker f + \operatorname{Im} f$;

(ii) $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$;

(iii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$;

(iv) $\ker f = \ker f^2$.

Exercice 5

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur F et G deux sous-espaces de E pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = F$ et $\mathrm{Im}\, f = G$.

Exercice 6

Soit f et g deux endomorphismes de E.

1) Prouver que $rg\,(f) - rg\,(g \circ f) = \dim\left(\mathrm{Im}\, f \cap \ker g\right)$.
2) On suppose que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f+g) = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(g) = E$.
3) On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et $rg\,(f) = rg\,(g) = rg\,(f \circ g)$.
   a. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\,(f \circ g)$. On appelle I ce sous-espace.
   b. Montrer que $\ker f = \ker g = \ker(f \circ g)$. On appelle J ce sous-espace.
   c. Prouver que $f \circ g\,(I) = I$, puis que $f(I) = g(I) = I$.
   d. Montrer que $I \cap J = \{0\}$ et $E = I \oplus J$.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) On suppose que A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est une matrice scalaire.
2) On suppose que A commute avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant la même matrice dans toutes les bases de E. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 9

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonnes non nuls X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = XY^{\top}$.

Exercice 10

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} > \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \left|a_{i,j}\right|$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$.