Révisions de 1ère année

Analyse asymptotique

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_n+u_{n+1}\sim\dfrac{2}{n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^+ et donner un équivalent simple de u_n.

b. On suppose que $u_n\to 0^+$ et $u_n+u_{n+1}\sim\dfrac{2}{n}$. A-t-on $u_n\sim\dfrac{1}{n}$?

c. On suppose que $u_n\to 0$ et $u_n+u_{2n}\sim\dfrac{3}{2n}$. Montrer que $u_n\sim\dfrac{1}{n}$.

Exercice 2

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f_a(x)=(x^2-ax+1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$.

a. Donner un équivalent simple de $f_a(x)$ en $x=3$.
Pour quelle(s) valeur(s) de *a* peut-on prolonger f_a par continuité en 3 ?

b. Plus généralement, soit *g* est une fonction définie au voisinage de 3 et dérivable en 3. A quelle condition sur *g* la fonction $f:x\mapsto g(x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 3 ?
Donner alors $f(3)$ en fonction de $g'(3)$.

Exercice 3

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on pose $f_\lambda(x)=\arctan(x+\lambda)-x+\lambda$.

1) Prouver que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, f_λ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $f_\lambda(x)=0$ admet une unique solution, notée $g(\lambda)$.

On cherche à étudier la fonction *g*. On appelle *C* sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2) Justifier que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f_{-\lambda}(x)=-f_\lambda(-x)$. En déduire que *g* est impaire.
3) Que vaut *g*(0) ?
4) Justifier que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $g(\lambda)=\arctan\big(g(\lambda)+\lambda\big)+\lambda$.
5) Soit $(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda<\lambda'$. Montrer que $f_\lambda\big(g(\lambda')\big)<0$ et en déduire le sens de variation de *g*.
6) Justifier que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $g(\lambda)>\lambda-\dfrac{\pi}{2}$ et en déduire la limite de *g* en + ∞.
7) Prouver que *C* admet une asymptote oblique en + ∞. Donner une équation de cette asymptote, puis sa position relative par rapport à *C*.

8) Démontrer que $g(\lambda)=\lambda+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\lambda}+\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

9) Prouver que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $g(\lambda)=f_0^{-1}(-2\lambda)-\lambda$ et en déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.

10) Prouver que $g(\lambda)\underset{0}{\sim}\sqrt[3]{6\lambda}$. En déduire que g n'est pas dérivable en 0, mais que C admet une tangente verticale en O, l'origine du repère.

Exercice 4

Soit $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto x-\ln(1+x)$.

a. Montrer que la restriction de f à $]-1,0]$ (*resp.* $[0,+\infty[$) définit une bijection $f_-:]-1,0]\to\mathbb{R}_+$ (*resp.* $f_+:[0,+\infty[\to\mathbb{R}_+$).
b. Donner l'équivalent le plus simple de $f(x)$ en 0 et en déduire celui de $f_-^{-1}(x)$, puis celui de $f_+^{-1}(x)$.
c. Déterminer le développement asymptotique à deux termes de $f_+^{-1}(x)$ en 0^+.

Exercice 5

On pose $f(x)=\frac{e^x}{\ln(1+x)}+\frac{\alpha}{x}+\beta$. Déterminer α et β afin que $\lim\limits_{0} f=0$.

Préciser alors un équivalent simple de f en 0.

Exercice 6

Soit $f_0(x)=1-x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=\frac{1}{2-f_n(x)}$. Après avoir justifié que les fonctions f_n sont bien définies au voisinage de 0, trouver le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f_n(x)$.

Exercice 7

Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

Equations Différentielles

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle (E). On cherchera les solutions maximales.

a. $(E): x(x^2+1)y'-y=x^3$.
b. $(E): |1+x|\,y'+y=1+2x$.

Exercice 2

Résoudre $(E_\lambda): y''-\lambda y=e^{\lambda t}$ où λ est un paramètre réel.

Exercice 3

Résoudre le système différentiel $(S):\begin{cases} x'(t)=-x(t)+3y(t)+e^t \\ y'(t)=-2x(t)+4y(t) \end{cases}$ avec $x(0)=0$ et $x'(0)=4$.

☺ *Poser* $z=x-y$.

Exercice 4

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E):(1+t^2)y''-2(t-1)^2y'-2(2t-1)y=0$.

a. Soit *f* une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(t)=(1+t^2)f'(t)+2tf(t)$.

   Montrer que *f* est solution de (E) si et seulement si *g* est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

   ☺ *Après avoir justifié que cela est possible, calculer* $g'(t)-2g(t)$.

b. Résoudre alors (E).

Exercice 5

Soit l'équation $(E): y''-y=\dfrac{1}{cht}$. On cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

a. Pour toute fonction *f* deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $g:t\mapsto e^t f(t)$.
   Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si g' est solution de $(E'): y'-2y=\dfrac{e^t}{cht}$.

b. Résoudre (E') puis (E).

Exercice 6

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f'(t)+f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Montrer que $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

☺ *On pourra considérer f comme solution d'une équation* $y'+y=g$.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle (E). On cherchera les solutions maximales.

a. $(E): y'=e^{t+y}$ (variable *t*).

b. $(E):\ y'=1+y^2$.

Polynômes

Exercice 1

A quelle condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, le polynôme X^2+X+1 divise-t-il X^4+aX^2+bX+c ? Donner alors le quotient.

Exercice 2

Factoriser X^5-5X^3+5X+2 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sachant qu'il admet une racine double.

Exercice 3

On pose $P = X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^6 + 4X^5 - 2X^4 + X^2 - 2X + 1$.

a. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 dans *P*.
b. Factoriser *P* en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4

On pose $P = X^3 + aX + b$ avec *a* et *b* réels.

a. Montrer que *P* admet une racine au moins double si et seulement si $4a^3 + 27b^2 = 0$.
b. Discuter le nombre de racines réelles de *P*.

Exercice 5

Factoriser $(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 6

1) Déterminer tous les polynômes *P* de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(z+z') = P(z) + P(z').$$

2) Déterminer tous les polynômes *P* de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$P(zz') = P(z)P(z').$$

☺ *On pourra commencer par supposer que P admet une racine non nulle.*

Exercice 7

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R = 0$.

Le résultat reste-t-il vrai si $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$?

Exercice 8

Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P, XP', X^2P'', X^3P''')$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
b. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 9

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 3 et $E = \left\{ P \in \mathbb{C}_n[X] \setminus X^2 + 1 \,\middle|\, P - P(0) \right\}$.

a. Montrer que *E* est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$.
b. Déterminer une base et la dimension de *E*.
c. Déterminer un supplémentaire de *E* dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 10

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $q \in \mathbb{N}$ et unitaire. On définit :

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] : P \mapsto Q(X+1)P(X-1) + Q(X-1)P(X+1).$$

a. Montrer que φ est linéaire.

b. Si P est de degré $p \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)$ en fonction de ceux de P et Q.

c. Déterminer le noyau de φ.

d. Existe-t-il des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par φ ?

e. φ est-elle surjective ?

Nombres complexes

Exercice 1

Soient A, B et C trois points du plan complexe, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$\begin{aligned} ABC \text{ équilatéral} \quad &\Leftrightarrow \quad j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0 \end{aligned}$$

Exercice 2 (*Mines-Ponts – PSI – 2017*)

Trouver les nombres complexes z tels que z, z^2 et z^5 soient les affixes de points alignés.

Exercice 3 (*Arts et Métiers – PSI – 2017*)

On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \le 1\}$. Soit f définie sur D par $f(z) = |\cos z|^2$.

On rappelle que $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

1. Montrer que f est bornée sur D.
2. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D.

Exercice 4 (*Centrale – PSI – 2014*)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ pour que les quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 du polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient les affixes des quatre sommets d'un carré du plan complexe.

Exercice 5 (*Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas*)

On pose $z = e^{i2\pi/5}$, puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.

1. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
3. Le cercle C de centre Ω, d'affixe $z_\Omega = -\frac{1}{2}$, passant par le point M d'affixe $z_M = i$ coupe l'axe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $x_I + x_J = x_I x_J = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique et dont un des sommets est le point d'affixe 1.
4. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $ABCDE$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.