

Corrigé du DM de n° 6
Exercice 1

1) Quand $x=0$, $\frac{e^{-xt}}{x+t} = \frac{1}{t}$ et $\int_0^t \frac{dt}{t}$ diverge, donc f n'est pas défini en 0.

Quand $x \in \mathbb{R}_-^*$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{x+t}$ n'est pas définie en $-x > 0$, donc f n'est pas défini sur $\mathbb{R}_-^*$.

Quand $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

- $\frac{e^{-xt}}{x+t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-xt}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int^+\frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\int^+ \frac{e^{-xt}}{x+t} dt$ converge ;
- $\frac{e^{-xt}}{x+t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{x}$, donc $\int_0^+ \frac{e^{-xt}}{x+t} dt$ converge.

Finalement :

f est définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$.

Notons $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{x+t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions et avec la formule de Leibniz, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$:

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j j!}{(x+t)^{j+1}} (-t)^{k-j} e^{-xt} = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{1}{(k-j)!} \frac{t^{k-j}}{(x+t)^{j+1}} e^{-xt}.$$

Et en ré-indicant :

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j j!}{(x+t)^{j+1}} (-t)^{k-j} e^{-xt} = (-1)^k k! \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \frac{t^j}{(x+t)^{k-j+1}} \right) e^{-xt}.$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq k! \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \frac{t^j}{(a+t)^{k-j+1}} \right) e^{-at}$ et la fonction $t \mapsto k! \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \frac{t^j}{(a+t)^{k-j+1}} \right) e^{-at}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable en $+\infty$ devant $t \mapsto e^{-\frac{a}{2}t}$ (qui est intégrable en $+\infty$), donc est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On peut alors conclure que f est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc f est de classe C^∞ sur $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [a, +\infty[$, c'est-à-dire :

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On a de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) dt$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u = xt$, on a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u/x} \frac{1}{x} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u} du = \int_0^1 \frac{e^{-u}}{x^2+u} du + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u} du.$$

Pour tout $u \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-u}}{x^2+u} \leq e^{-u}$, donc :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u} du \leq \int_1^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{e}.$$

Ainsi, $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u} du$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, pour tout $u \in [0, 1]$, on a $1-u \leq e^{-u} \leq 1$ par convexité de la fonction exponentielle, donc :

$$\int_0^1 \frac{1-u}{x^2+u} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-u}}{x^2+u} du \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+u} du.$$

Et :

- $\int_0^1 \frac{1}{x^2+u} du = [\ln(x^2+u)]_0^1 = \ln(x^2+1) - \ln(x^2) = \ln(x^2+1) - 2\ln x$;
- $\int_0^1 \frac{u}{x^2+u} du = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{x^2+u}\right) du = 1 - x^2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+u} du = 1 - x^2 \ln(x^2+1) + 2x^2 \ln x$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} (-2\ln x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2+1) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x^2+1) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ (par croissances comparées pour la dernière), donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_0^1 \frac{1-u}{x^2+u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\ln x.$$

D'après le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents :

$$\int_0^1 \frac{e^{-u}}{x^2+u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\ln x.$$

Et comme $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u} du$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x^2+u} du = o_{x \rightarrow 0}(-2\ln x)$ et ainsi :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2\ln x$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a avec une intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{x+t} \right]_0^A - \frac{1}{x} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{x} \frac{e^{-xA}}{x+A} + \frac{1}{x^2} \right]_0^A - \frac{1}{x} \int_0^A \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt.$$

Et quand A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt.$$

Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge, on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x^2} dt = \frac{1}{x^3}.$$

Ainsi, $\left| f(x) - \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt \leq \frac{1}{x^4}$ et comme $\frac{1}{x^4} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$, on peut conclure que :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$

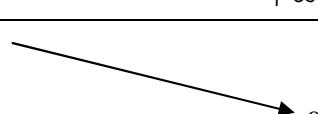
3) D'après la question 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+t)^2} + \frac{t}{x+t} \right) e^{-xt} dt.$$

Or, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, $\left(\frac{1}{(x+t)^2} + \frac{t}{x+t} \right) e^{-xt} > 0$, donc $f'(x) \leq 0$ et la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après les équivalents trouvés dans la question précédente, on a $\lim_{0^+} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$, ce qui permet de construire le tableau :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0



4) On a vu dans la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+t)^2} + \frac{t}{x+t} \right) e^{-xt} dt = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} + e^{-xt} - x \frac{e^{-xt}}{x+t} \right) dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = f(x)$ (donc l'intégrale converge) et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge (et vaut $\frac{1}{x}$), on peut écrire :

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt - \frac{1}{x} + x f(x).$$

Or, on a vu dans la question 2 que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt.$$

Soit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - x f(x).$$

Et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{x} - x f(x)\right) - \frac{1}{x} + x f(x) = 2x f(x) - \frac{2}{x}.$$

Finalement :

La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $y' - 2x y = -\frac{2}{x}$.

5) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Les solutions de $y' - 2x y = 0$, l'équation homogène associée, sont les fonctions $x \mapsto k e^{x^2}$ où k est une constante réelle.

On cherche alors une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto k(x) e^{x^2}$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$k'(x) e^{x^2} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow k'(x) = -\frac{2}{x} e^{-x^2}.$$

Comme $\frac{2}{x} e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{2}{x} e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut choisir :

$$k(x) = -\int_x^{+\infty} \left(-\frac{2}{t} e^{-t^2}\right) dt = 2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt.$$

Finalement :

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \left(2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt + k\right) e^{x^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle

que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f(x) = \left(2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt + k\right) e^{x^2} = 2e^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt + k e^{x^2}.$$

Or, d'après la question 3, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt + k = 0.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = 0$ (car $\int^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ converge), donc $k = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt = 2e^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\frac{1}{(x+n)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle (donc positive), donc

la série $\sum \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge donc, ce qui

permet de conclure que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{(x+N+1)^2} \leq \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)^2} = 0$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, toutes les fonctions f_n sont rationnelles, donc continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, toujours en conséquence du critère spécial des séries alternées, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est du signe de son premier terme, soit de $f_0(x) = \frac{1}{x^2}$ qui est positif. Donc, f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et finalement :

f est bien définie, continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+1+n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{(-1)^0}{(x+0)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} = \frac{1}{x^2} - f(x).$$

Ainsi :

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

3) On a vu dans la question 1 que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1. Alors :

$$f(1) = \lim_{h \rightarrow 1} f(h) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on a $f(x+1) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et donc :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - f(x+1) = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Soit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

4) On a vu dans la question 1 que f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{x^2} - f(x+1) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, on peut conclure, par comparaison de fonctions positives, que :

$$f \text{ est intégrable en } +\infty.$$

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_x^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$ (avec $f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{(t+n)^2}$).

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

- Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N f_n$ est continue (les f_n le sont), donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- D'après la question 1, la suite $\left(\sum_{n=0}^N f_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est continue, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

○ Si N est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(t) &= \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(t+N-2)^2} - \frac{1}{(t+N-1)^2} \right) + \frac{1}{(t+N)^2} \geq 0 \\ \sum_{n=0}^N f_n(t) &= \frac{1}{t^2} - \left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+2)^2} \right) - \dots - \left(\frac{1}{(t+N-1)^2} - \frac{1}{(t+N)^2} \right) \leq \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

○ Si N est impair :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(t) &= \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(t+N-1)^2} - \frac{1}{(t+N)^2} \right) \geq 0 \\ \sum_{n=0}^N f_n(t) &= \frac{1}{t^2} - \left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+2)^2} \right) - \dots - \left(\frac{1}{(t+N-2)^2} - \frac{1}{(t+N-1)^2} \right) - \frac{1}{(t+N)^2} \leq \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas, on a $\left| \sum_{n=0}^N f_n(t) \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[x, +\infty[$.

Alors, avec le théorème de convergence dominée, on peut alors conclure que :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt = \int_x^{+\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f_n(t) \right) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \int_x^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_x^{+\infty} f_n(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(t+n)^2} dt = \left[-\frac{(-1)^n}{t+n} \right]_x^{+\infty} = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et ainsi, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} F(x) + F(x+1) &= \int_x^{+\infty} f(t) dt + \int_{x+1}^{+\infty} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t+1) dt \\ &= \int_x^{+\infty} [f(t) + f(t+1)] dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On a donc bien pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$$

7) La fonction F est l'opposée d'une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $F' = -f$.

Or, d'après la question 1, f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $F' = -f$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, et ainsi, F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, comme F est continue en 1, on a $\lim_{x \rightarrow 0} F(x+1) = F(1)$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - F(x+1) \right) = +\infty.$$

Enfin, comme F est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (par positivité de l'intégrale avec f positive sur $\mathbb{R}_+^*$), on a, avec le théorème de la limite monotone, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$.

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x+1) = \ell$, donc :

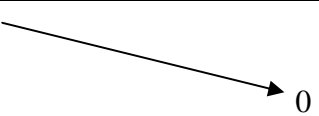
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) + F(x+1)] = 2\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

On obtient alors le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
F	$+\infty$	0



8) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $0 < x-1 < x < x+1$, donc par décroissance de F , on a :

$$F(x+1) \leq F(x) \leq F(x-1).$$

Et en additionnant $F(x)$, on obtient pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$F(x+1) + F(x) \leq 2F(x) \leq F(x) + F(x-1)$$

D'après la question 6, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $F(x) + F(x+1) = \frac{1}{x}$ et $F(x) + F(x-1) = \frac{1}{x-1}$, donc :

$$\frac{1}{x} \leq 2F(x) \leq \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}.$$

Or, $\frac{1}{2(x-1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$, donc le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents permet de conclure que :

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

9) On a vu que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x+1) = F(1) \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} - F(x+1) - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} - F(x+1).$$

Avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$, on obtient :

$$F(x) - \frac{1}{2x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Et comme $x \mapsto \frac{1}{2x}$ n'est pas intégrable en 0 :

$$\text{La fonction } x \mapsto F(x) - \frac{1}{2x} \text{ n'est pas intégrable en 0.}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\frac{1}{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2(x-1)} \Leftrightarrow 0 \leq F(x) - \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x(x-1)}.$$

Or, $\frac{1}{2x(x-1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc par comparaison de fonctions positives :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto F(x) - \frac{1}{2x} \text{ est intégrable en } +\infty.}$$

10) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la fonction $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(|g_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, donc la série $\sum g_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge avec de plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^N g_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} g_n(x) \right| \leq \frac{1}{x+N+1} \leq \frac{1}{N+1}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, toutes les fonctions g_n sont rationnelles, donc continues sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{2p} F(t) dt = \int_1^{2p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{2p} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{2p} \frac{(-1)^n}{t+n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n}.$$

Ainsi, on a bien pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_1^{2p} F(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n}}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n} &= \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \ln(n+2p) - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \ln(n+1) \\ &= \sum_{n=2p}^{2N+2p} (-1)^{n-2p} \ln n - \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^{n-1} \ln n \\ &= \sum_{n=2p}^{2(N+p)} (-1)^n \ln n + \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \ln n \\ &= \sum_{n=1}^{2(N+p)} (-1)^n \ln n - \sum_{n=1}^{2p-1} (-1)^n \ln n + \sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \ln n \\ &= \sum_{n=1}^{2(N+p)} (-1)^n \ln n - \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln n + \ln(2p) + \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln n - \ln(2N+1) \end{aligned}$$

Et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \ln n &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{2m} \ln n - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{2m} \ln n = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^m \ln n - \sum_{n=1}^{2m} \ln n = 2 \sum_{n=1}^m \ln(2n) - \sum_{n=1}^{2m} \ln n \\ &= 2 \sum_{n=1}^m \ln 2 + 2 \sum_{n=1}^m \ln n - \sum_{n=1}^{2m} \ln n = 2m \ln 2 + 2 \ln(m!) - \ln((2m)!) = \ln \left(\frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m)!} \right) \end{aligned}$$

Avec la formule de Stirling, on peut écrire :

$$m! = \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e} \right)^m \varepsilon_m \quad \text{avec } \varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \ln n = \ln \left(\frac{2^{2m} 2\pi m \left(\frac{m}{e} \right)^{2m} \varepsilon_m^2}{\sqrt{4\pi m} \left(\frac{2m}{e} \right)^{2m} \varepsilon_{2m}} \right) = \ln(\sqrt{\pi m}) + \ln \left(\frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_{2m}} \right).$$

Et comme $\varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$, on a $\ln \left(\frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_{2m}} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1^2}{1} \right) = 0$, et donc :

$$\sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \ln n = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} \ln \pi + o_{m \rightarrow +\infty}(1).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n} &= \frac{1}{2} \ln(N+p) + \frac{1}{2} \ln \pi + o_{N \rightarrow +\infty}(1) + \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \ln \pi + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \\ &\quad - \ln(2N+1) - \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln n + \ln(2p) \end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^{2N} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n} = \ln \pi + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{N(N+p)}{(2N+1)^2} \right) - \sum_{n=1}^{2p-1} (-1)^n \ln n + o_{N \rightarrow +\infty}(1).$$

Et comme $\frac{N(N+p)}{(2N+1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^2}$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n} = \ln \pi + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2^2} \right) - \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln n + \ln(2p) = \ln \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sum_{n=1}^{2p-1} (-1)^n \ln n.$$

Et ainsi, on a bien :

$$\boxed{\int_1^{2p} F(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_1^{2p} \frac{dt}{t+n} = \ln \left(\frac{\pi}{2} \right) - \sum_{n=1}^{2p-1} (-1)^n \ln n}$$

Avec ce que l'on a vu plus haut, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_1^{2p} F(t) dt &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n \ln n + \ln(2p) \\
 &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left[\frac{1}{2} \ln p + \frac{1}{2} \ln \pi + o_{p \rightarrow +\infty}(1) \right] + \ln(2p) \\
 &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \pi + \ln 2 + \ln p - \frac{1}{2} \ln p + o_{p \rightarrow +\infty}(1) \\
 &= \ln \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} \ln p + o_{p \rightarrow +\infty}(1)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \int_1^{2p} \left(F(t) - \frac{1}{2t} \right) dt &= \int_1^{2p} F(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^{2p} \frac{dt}{t} \\
 &= \ln \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} \ln p + o_{p \rightarrow +\infty}(1) - \frac{1}{2} \ln(2p) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + o_{p \rightarrow +\infty}(1)
 \end{aligned}$$

Et avec $\int_1^{+\infty} \left(F(t) - \frac{1}{2t} \right) dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^{2p} \left(F(t) - \frac{1}{2t} \right) dt$, on obtient :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \left(F(t) - \frac{1}{2t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$