

Corrigé du DS n° 6

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les parties I à III ont été abordées par presque tous les candidats.

Concernant la forme, une quantité non-négligeable de copies ne respecte pas les standards de présentations qui peuvent être attendus pour de futurs ingénieurs : écriture claire, lisible, propos structuré, mise en avant des résultats ; mais aussi des standards relatifs à un concours scientifique : répondre effectivement à la question posée, penser à conclure, citer les résultats ou les questions précédentes utilisés, vérifier les hypothèses de validité. Ces copies sont donc pénalisées comme prévu dans la notice de l'épreuve. Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction sitôt l'énoncé entre les mains.

I Intégrale de Gauss

Partie I

Cette partie est une version très guidée d'une méthode classique permettant d'obtenir la valeur de l'intégrale de Gauss à l'aide d'intégrales à paramètres. Elle a permis aux candidats sérieux d'entrer en confiance dans le sujet.

Q1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$ par

croissances comparées, donc $e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ et comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Avec la positivité de $t \mapsto e^{-t^2}$, on peut conclure que :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

Q1. Il s'agissait d'établir la convergence absolue d'une intégrale. Beaucoup de candidats oublient la continuité et parlent de convergence sans précision de signe. Cette première question donne bien souvent une indication de la suite de la copie.

Q2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est continue sur $[0, 1]$ comme quotient de telles fonctions.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ est bien définie, donc :

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt = f(x).$$

Ainsi :

La fonction f est paire.

On a $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan t]_0^1$, soit :

$$f(0) = \frac{\pi}{4}$$

Q2. Les résultats de première année sur l'intégrale de fonction continue sur un segment suffisait.

Q3. Posons $h(x, t) = \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable (**Q2**) sur $[0, 1]$.
- Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $(x, t) \in [-a, a] \times [0, 1]$, on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = 2|x|e^{-(t^2+1)x^2} \leq 2a.$$

Et la fonction $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$.

On peut donc conclure que f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc sur $\bigcup_{a \in \mathbb{R}_+^*} [-a, a] = \mathbb{R}$

avec de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$ et ainsi :

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f': x \mapsto \int_0^1 (-2xe^{-(t^2+1)x^2}) dt.$$

Q3. Le théorème de dérivation est souvent bien connu, en revanche, les dominations locales sont souvent fausses à cause du signe des bornes. Peu de candidats pensent à utiliser la parité.

Q4. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et g est une primitive de cette fonction, donc :

$$g \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Q4. Le théorème fondamental de l'analyse a aussi des hypothèses.

Q5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \int_0^1 (-2xe^{-(t^2+1)x^2}) dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt \underset{u=xt}{=} -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Or, $g'(x) = e^{-x^2}$, donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2g'(x)g(x)$$

Q5. - Q6. Bien réussies dans l'ensemble.

Q6. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (**Q3**), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ et avec **Q2** et la question précédente :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^x 2g'(t)g(t) dt = \frac{\pi}{4} - \left[g(t)^2 \right]_0^x = \frac{\pi}{4} - g(x)^2 + g(0)^2.$$

Enfin, comme $g(0) = 0$, on obtient bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$$

Q7. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\left| \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \right| = e^{-x^2} \frac{e^{-t^2x^2}}{t^2+1} \leq e^{-x^2}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \right| dt \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - f(x) \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Et par continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{g(x)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Or, g est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{g(x)^2} = g(x)$ et ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Q7. Intervertir une limite et une intégrale nécessite des hypothèses. Le passage de $\lim g^2$ à $\lim g$ se fait trop souvent sans précisions.

II Formule de Stirling

Partie II

Cette partie était l'occasion de mettre en œuvre des compétences très classiques, mais parfois délicates d'analyse : domination, étude locale, développements limités, encadrements...

II.A –

Q8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et par croissances comparées :

$$t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, $t \mapsto t^n e^{-t}$ l'est aussi et donc $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est bien définie.

Ainsi :

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Q8. On retrouve les mêmes défauts qu'en **Q1**.

Q9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathbb{R}_+$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^X t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_0^X + \int_0^X (n+1) t^n e^{-t} dt = -X^{n+1} e^{-X} + (n+1) \int_0^X t^n e^{-t} dt.$$

Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^{n+1} e^{-X} = 0$ (par croissances comparées) et d'après la question précédente, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge (et $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$ aussi), donc en passant à la limite quand X tend vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = (n+1) I_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc $I_n > 0$ (et $I_n \neq 0$ entre autres). La relation précédente permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{I_n}{I_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1}}{I_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = n!$$

Soit, $I_n = n! I_0$ et la relation reste vraie pour $n = 0$, car $0! = 1$.

Enfin, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = n!$$

Q9. Très classique. Il faut néanmoins se rappeler que l'on manipule des intégrales généralisées et appliquer le théorème adapté.

II.B –

Q10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant le changement de variable $t = y\sqrt{n} + n$, on a :

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \frac{1}{n^n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (y\sqrt{n} + n)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \frac{1}{n^n} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(t-n)} \frac{1}{\sqrt{n}} dt = \frac{e^n}{n^n \sqrt{n}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Et d'après la question précédente, on a $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, donc $\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$ converge, avec :

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \frac{e^n}{n^n \sqrt{n}} n! = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n!$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$$

Q10. Il fallait trouver le bon changement de variables. Un certain nombre de candidats, en « réussissant » à obtenir le résultat avec des calculs faux, perdent leur crédibilité aux yeux du correcteur.

Q11. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $y > -\sqrt{n}$

(donc $1 + \frac{y}{\sqrt{n}} > 0$) et :

$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} = e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)} e^{-y\sqrt{n}} = e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n}} = e^{n \left(\frac{y}{\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - y\sqrt{n}} = e^{-\frac{y^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ et ainsi :

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Q11. Question très peu réussie. La manque de méthode (simplement fixer la variable, puis faire varier n) pour l'étude de la convergence simple est à déplorer. Beaucoup de limites dépendent encore de n .

Q12. La fonction q est définie et continue sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, donc :

$$q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1).$$

Ainsi :

La fonction q est prolongeable en une fonction continue sur $] -1, +\infty[$ en posant $q(0) = \frac{1}{2}$.

Q12. Assez bien réussie, même si certains ne parlent que du prolongement en 0.

Q13. Soit $x \in] -1, +\infty[$.

Pour tout $u \in]0, 1]$, on a $1 + xu > 1 - u \geq 0$, donc $1 + xu \neq 0$ et pour $u = 0$, on a $1 + xu = 1 \neq 0$. Ainsi,

$1 + xu \neq 0$ pour tout $u \in [0, 1]$. La fonction $u \mapsto \frac{u}{1+ux}$ est donc définie sur $[0, 1]$ et est aussi continue sur ce segment en tant que quotient de telles fonctions.

Pour $x \neq 0$, on peut alors écrire (avec $1+x > 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du &= \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{xu}{1+ux} du = \frac{1}{x} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+ux}\right) du = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{x du}{1+ux} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} [\ln|1+ux|]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{\ln|1+x|}{x^2} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = q(x) \end{aligned}$$

Et pour $x = 0$:

$$\int_0^1 \frac{u}{1+ux} du = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = q(0).$$

Finalement, on a bien pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$$

Q13. Bien peu de candidats s'émeuvent de diviser par une quantité pouvant s'annuler.

Q14. Soient $a, b \in]-1, +\infty[$ tels que $a < b$.

Pour tout $u \in [0, 1]$, on a $0 < 1+ua \leq 1+ub$, donc $\frac{u}{1+ub} \leq \frac{u}{1+ua}$ et ainsi :

$$q(b) = \int_0^1 \frac{u}{1+ub} du \leq \int_0^1 \frac{u}{1+ua} du = q(a).$$

Donc :

La fonction q est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$.

- Si $y > 0$, on a $-1 < \frac{y}{\sqrt{n}} \leq y$, donc $q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \geq q(y)$, soit :

$$\frac{\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{y^2}{n}} \geq \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n} y \leq \ln(1+y) - y.$$

D'où :

$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} = e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n} y} \leq e^{\ln(1+y) - y} = (1+y)e^{-y}.$$

- Pour $y = 0$, on a $f_n(0) = 1 = (1+0)e^{-0}$.
- Si $-\sqrt{n} < y < 0$, on a $-1 < \frac{y}{\sqrt{n}} < 0$, donc $q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \geq q(0) = \frac{1}{2}$, soit :

$$\frac{\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{y^2}{n}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n} y \leq -\frac{y^2}{2} \Leftrightarrow f_n(y) \leq e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

- Si $y \leq -\sqrt{n}$, on a $f_n(y) = 0 \leq e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Finalement, on a bien pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$f_n(y) \leq \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{quand } y \geq 0 \\ e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{quand } y < 0 \end{cases}$$

Q14. C'était la question la plus délicate de cette partie. Peu de candidats comprennent l'enchaînement de questions, en particulier l'utilité de la fonction q . Certains pensent que l'étude de la monotonie de q revient à étudier $q(x+1) - q(x)$.

Q15. Dans les questions précédentes, on a établi que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car $y \mapsto 0$ l'est sur $]-\infty, -\sqrt{n}[$ et $y \mapsto \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$ l'est sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$).
- La suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ (**Q11**).
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $|f_n(y)| = f_n(y) \leq \varphi(y)$ avec :

$$\varphi(y) = \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{quand } y \geq 0 \\ e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{quand } y < 0 \end{cases}.$$

Et la fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ car par croissances comparées, $\varphi(y) = o\left(\frac{1}{y^2}\right)$ et $\varphi(y) = o\left(\frac{1}{y^2}\right)$ est $y \mapsto \frac{1}{y^2}$ est intégrable en $-\infty$ et en $+\infty$.

Avec le théorème de convergence dominée, on peut alors conclure que $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ et f_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

D'après la question **Q7**, on a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc avec la parité de $t \mapsto e^{-t^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ et en posant le changement de variable $y = \sqrt{2} t$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{\pi}.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy = \sqrt{2\pi}.$$

Or, d'après la question **Q10**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}$, ce qui donne bien la l'équivalent de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Q15. Traitée par moins d'un tiers des candidats, et correctement par un tiers de ces derniers. La résolution de cette question, en particulier l'application du théorème de convergence dominée, était pourtant cousue de fil blanc.

II.C –

Q16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ donc les trois suites sont bien définies et :

$$\begin{aligned} w_n = v_{n+1} - v_n &= \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1}}{\frac{(n+1)!}{\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}}} \right) \\ &= \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n e^{-1} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Avec $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$, on obtient :

$$w_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Soit :

$$\boxed{w_n = \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)}$$

On a alors $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et la série positive $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge, donc par comparaison de séries positives (au moins à partir d'un certain rang pour $\sum w_n$), on peut conclure que :

La série $\sum w_n$ converge.

Q16. Le calcul du développement asymptotique a été plutôt bien mené. En revanche, l'utilisation de théorème de comparaison nécessite de parler de positivité.

II.C.1)

Q17. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n > 0$, donc $b_n \neq 0$, l'hypothèse $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, se récrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $1 - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon$, soit avec $b_n > 0$:

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n.$$

Q17. - Q18. Il s'agissait de démontrer le théorème de sommation d'équivalents. La référence à la positivité de (b_n) est souvent absente.

Q18. On vient de voir que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive à partir d'un certain rang. Comme $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et la série positive $\sum b_n$ converge, par comparaison de séries positives (au moins à partir d'un certain rang pour $\sum a_n$), on peut conclure que :

La série $\sum a_n$ converge.

De plus, pour tout entier $k \geq n_0$, $(1 - \varepsilon)b_k \leq a_k \leq (1 + \varepsilon)b_k$, donc pour tout entier $n \geq n_0$:

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} b_k.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k > 0$, donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} b_k} = 1$, autrement dit que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

II.C.2)

Q19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $[n, n+1]$, donc pour tout

$t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et en intégrant entre n et $n+1$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Q19. - Q20. Très classiques et bien réussies.

Q20. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et l'encadrement ci-dessus permet

d'affirmer par comparaison de séries positives que la série $\sum \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$ converge aussi.

Par télescopage, on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_k^{k+1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \frac{1}{n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors sommer de $k = n$ à l'infini les inégalités obtenues dans la question précédente, ce qui donne :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow R_n - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq R_n.$$

Ou encore :

$$\frac{1}{n} \leq R_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc par le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents :

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

II.C.3)

Q21. On a vu dans la question **Q16** que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge et est à termes strictement positifs. Les hypothèses de la question **Q18** sont réunies (ou presque : a priori, nous avons établi que la série $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive seulement à partir d'un certain rang, mais comme le résultat de la question **Q18** porte sur les restes, cela suffit). On peut donc conclure que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{12k^2}.$$

Or, d'après la question **Q20**, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{12k^2} = \frac{1}{12} R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$, donc par transitivité de $\sim$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n}}$$

Q21. Traitée dans la moitié des copies, et entièrement réussie dans la moitié des cas. Il suffisait à nouveau d'être capable d'utiliser les résultats des questions précédentes.

Q22. On a vu que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc :

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par télescope :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k - v_n = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \ln\left(\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}\right).$$

D'après la question précédente, on a alors :

$$\ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}\right) = \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit :

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = e^{\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0.}$$

Q22. Très peu traitée. Beaucoup ne voyaient pas comment démarrer.

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Partie III

On peut noter un manque global de formalisation en probabilité avec par exemple, des découpages d'événements sans union dont la probabilité s'écrit miraculeusement sous forme de somme, l'utilisation de l'indépendance sans préciser de quelles variables ou de quels événements il est question, le remplacement de variables aléatoires dans un événement... Peu de candidat jugent utile d'utiliser les propriétés admises en introduction de cette partie.

III.A –

Q23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $Z_n = \frac{1}{2}(X_n + 1)$.

Comme $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a $Z_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}(-1+1), \frac{1}{2}(1+1)\right\} = \{0, 1\}$ et $P(Z_n = 1) = P(X_n = 1) = p$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p , et en particulier :

$$Z_1 = \frac{1}{2}(X_1 + 1) \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p.$$

Les X_k sont indépendantes, donc les Z_k le sont aussi, donc $\sum_{k=1}^n Z_k$ suit la loi binomiale de paramètres n et p . On a alors :

$$E\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = np \qquad V\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = np(1-p)$$

On a $S_0 = 0$, donc $E(S_0) = 0$ et $V(S_0) = 0$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n (2Z_k - 1) = 2\sum_{k=1}^n Z_k - n.$$

Donc :

$$E(S_n) = E\left(2\sum_{k=1}^n Z_k - n\right) = 2E\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) - n = 2np - n = n(2p - 1)$$

$$V(S_n) = E\left(2\sum_{k=1}^n Z_k - n\right) = 4V\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) = 4np(1-p)$$

Avec $E(S_0) = 0$ et $V(S_0) = 0$, les expressions ci-dessus restent valables dans le cas où $n = 0$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} E(S_n) &= n(2p - 1) \\ V(S_n) &= 4np(1-p) \end{aligned}$$

Q23. Presque tout les candidats ont traité cette question. En revanche, beaucoup d'entre-eux ont affirmé que S_n suivait la loi binomiale. Pour cette loi, il était attendu qu'elle soit justifiée.

Q24. ...

Q24. Traitée dans 60 % des copies. Elle a été plutôt bien réussie.

Q25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = P(S_{2n} = 0) = P\left(2\sum_{k=1}^{2n} Z_k - 2n = 0\right) = P\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k = n\right).$$

Et comme $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ suit la loi binomiale de paramètres $2n$ et p , on a $P\left(\sum_{k=1}^{2n} Z_k = n\right) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n}$,

ce qui se récrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

Q25. Beaucoup de contorsions pour « justifier » la relation donnée, parfois en contradiction avec la réponse donnée en **Q23**..

Q26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ (car $p \neq 0$ et $q \neq 0$) et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $a_n x^{2n} \neq 0$ et :

$$\frac{a_{n+1} x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}} = \frac{\binom{2n+2}{n+1} p^{n+1} q^{n+1} x^{2(n+1)}}{\binom{2n}{n} p^n q^n x^{2n}} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2 (2n)!} p q x^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} p q x^2 = \frac{4n+2}{n+1} p q x^2.$$

Donc, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4pqx^2$, donc d'après la règle de d'Alembert :

- $\sum a_n x^{2n}$ converge quand $4pqx^2 < 1$, soit $|x| < \frac{1}{2\sqrt{pq}}$;
- $\sum a_n x^{2n}$ diverge quand $4pqx^2 > 1$, soit $|x| > \frac{1}{2\sqrt{pq}}$

Ainsi :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n}$ est $R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$.

Q26. La règle de d'Alembert pour les séries entières ne s'appliquait pas directement. L'application de la règle pour les séries numériques a été utilisée mais rarement proprement : trop souvent la rédaction se limite à un quotient (éventuellement non défini) et une limite puis immédiatement une conclusion sur le rayon. Ceux qui ont utilisé la formule de Stirling à cette étape s'en sont bien sortis.

Q27. L'expression $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ est définie en $x=1$ quand la série $\sum a_n$ converge.

Or, avec l'équivalent de Stirling, on a :

$$a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} p^n q^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Remarquons que $4pq = 4p - 4p^2 = 1 - (1-2p)^2$ et $1-2p \in]-1, 1[$, donc $4pq \in]0, 1[$ avec $4pq = 1$ si et seulement si $(1-2p)^2 = 0$, soit $p = \frac{1}{2}$. Ainsi :

- quand $p \neq \frac{1}{2}$, on a $4pq \in]0, 1[$, donc $\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ par croissances comparées, soit $a_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ et, ainsi, $\sum a_n$ converge ;
- quand $p = \frac{1}{2}$, $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc $\sum a_n$ diverge.

Finalement :

L'expression $A(x)$ est défini en $x=1$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.

Q27. Il fallait discuter sur la valeur du rayon de la série. Peu nombreux sont ceux qui ont envisagé tous les cas possibles.

Q28. Pour tout $h \in]-1, 1[$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(1+h)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} h^n$.

Avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $h = x^2$ avec $x \in]-1, 1[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right) (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{2n-1}{2}\right) (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n! \times 2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^{2n} p^n q^n} x^{2n} \end{aligned}$$

Et avec $a_0 = 1$, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{x}{2\sqrt{pq}} \right)^{2n}$$

Alors, pour tout $x \in]-R, R[= \left] -\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right[$, on a $2\sqrt{pq} x \in]-1, 1[$ et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-(2\sqrt{pq} x)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{2\sqrt{pq} x}{2\sqrt{pq}} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = A(x).$$

Finalement, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

Q28. Les développements usuels sont bien connus et les candidats sont à l'aise pour l'exprimer à l'aide de factorielles. En revanche, pour certains, la notion de domaine de validité d'un tel développement semble inconnu ou inutile.

III.B –

Q29. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, appelons R_k l'évènement « le point revient pour la première fois à l'origine à l'issue du $(2k)^{\text{ième}}$ lancer de la pièce » et R_∞ l'évènement « le point ne revient jamais à l'origine ». On a :

$$R_k = (S_1 \neq 0) \cap (S_2 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2k-1} \neq 0) \cap (S_{2k} = 0).$$

Donc, $P(R_k) = b_k$.

De plus, la famille $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}}$ est un système complet d'évènements et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi des probabilités totales donne :

$$a_n = P(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(R_k) P_{R_k}(S_{2n} = 0) + P(R_\infty) P_{R_\infty}(S_{2n} = 0).$$

Or, si $k > n$ ou $k = \infty$, on a $(S_{2n} = 0) \cap R_k = \emptyset$, donc $P_{R_k}(S_{2n} = 0) = 0$ et ainsi :

$$a_n = P(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^n P(R_k) P_{R_k}(S_{2n} = 0).$$

Or, pour $\omega \in \Omega$, si R_k est réalisé, on a $S_{2k}(\omega) = 0$ et :

$$S_{2n}(\omega) = S_{2k}(\omega) + \sum_{j=2k+1}^{2n} X_j(\omega) = \sum_{j=2k+1}^{2n} X_j(\omega).$$

Donc, $S_{2n}(\omega) = 0$ si et seulement si $\sum_{j=2k+1}^{2n} X_j(\omega) = 0$ et ainsi :

$$P_{R_k}(S_{2n} = 0) = P\left(\sum_{j=2k+1}^{2n} X_j = 0\right).$$

Or, d'après l'énoncé, si $2k$ est compris entre 1 et $2n-1$ (soit k compris entre 1 et $n-1$), les variables aléatoires $\sum_{j=1}^{2n-2k} X_j$ et $\sum_{j=2k+1}^{2n} X_j$ suivent la même loi et ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$P_{R_k}(S_{2n} = 0) = P\left(\sum_{j=1}^{2n-2k} X_j = 0\right) = P(S_{2(n-k)} = 0) = a_{n-k}.$$

De plus, $P_{R_n}(S_{2n} = 0) = 1 = a_0 = a_{n-n}$, donc avec $P(R_k) = b_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient :

$$a_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k}.$$

Et enfin, comme $b_0 = 0$, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$$

Q29. La direction initiale était donnée, peu l'ont suivie. Certains candidats sont prêts à toutes les entortilleries pour obtenir la relation donnée. Ce qui fait que près de la moitié des copies abordant la question n'obtient presque aucun point.

Q30. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_1 \neq 0) \cap (S_2 \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} = 0) \subset (S_{2n} = 0)$, donc :

$$b_n \leq a_n.$$

Ceci prouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^{2n}$ est supérieur ou égal à celui de $\sum a_n x^{2n}$, c'est-à-dire R et donc, A et B sont toutes deux définies sur $] -R, R[$ (au moins).

Alors, pour tout $x \in] -R, R[$, le produit de Cauchy des $\sum a_n x^{2n}$ et $\sum b_n x^{2n}$ est valide et donne :

$$B(x)A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} \right) x^{2n}.$$

Or, $\sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{k=0}^0 b_k a_{n-k} = b_0 a_0 = 0$, donc :

$$B(x)A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n} - a_0 = A(x) - 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$B(x)A(x) = A(x) - 1$$

On a vu dans la question **Q27** que $A(x)$ est défini en $x=1$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq b_n \leq a_n$, donc si $A(1)$ est défini, $B(1)$ l'est aussi, ainsi que $A(-1)$ et $B(1)$ (car les séries $\sum a_n(-1)^n$ et $\sum b_n(-1)^n$ convergent absolument).

Or, si une série entière $\sum \alpha_n x^n$ à coefficients positifs et de rayon de convergence égal à R converge en $x=R$, alors sa somme est définie et continue sur $[-R, R]$ (car la série de fonctions continues $\sum f_n$ avec $f_n : x \mapsto \alpha_n x^n$ converge normalement sur $[-R, R]$).

Ainsi :

La formule établie ci-dessus est valable sur $[-R, R]$ quand $p \neq \frac{1}{2}$ et sur $] -R, R[$ quand $p = \frac{1}{2}$.

Q30. Question discriminante, le résultat n'était pas donné. Il fallait faire le produit de Cauchy avec soin.

Q31. D'après ce qui précède pour tout $x \in]-R, R[$, $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \neq 0$ (**Q28**), donc :

$$B(x) = \frac{A(x)-1}{A(x)} = 1 - \frac{1}{A(x)}.$$

Soit, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$B(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$$

Q31. Bien réussie par ceux ayant obtenu une relation correcte. Bien que l'énoncé le précise, beaucoup ignorent à nouveau de donner le domaine de validité de la formule.

Q32. La fonction $x \mapsto B(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$ est définie en $x=1$, si $1-4pq \geq 0$, ce qui revient à $(1-2p)^2 \geq 0$, qui est toujours vrai, donc :

L'expression de $B(x)$ obtenue à la question précédente est définie en $x=1$ pour tout $p \in]0, 1[$.

Avec les notations introduites dans la question **Q29**, on a $P(R_n) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et les R_n sont deux à deux incompatibles, donc par σ -additivité :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Ainsi :

La série $\sum b_n$ converge quel que soit $p \in]0, 1[$.

Q32. Comme en **Q27.**, il fallait discuter suivant la valeur du rayon de convergence de la série entière définissant B .

III.C –

Q33. A nouveau avec les notations introduites dans la question **Q29**, l'évènement « le point ne revient jamais à l'origine » est R_∞ et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}}$ est un système complet d'évènements, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(R_n) + P(R_\infty) = 1.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(R_n) = b_n$, donc :

$$P(R_\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(R_n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1 - B(1).$$

Comme la série positive $\sum b_n$ converge quel que soit $p \in]0, 1[$, le raisonnement fait dans la question **Q30** permet de conclure que B est continue sur $[-R, R]$, donc en 1 et ainsi, $B(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$.

On a donc :

$$P(R_\infty) = 1 - B(1) = \sqrt{1 - 4pq} = \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = \sqrt{(1 - 2p)^2} = |1 - 2p| = |q - p|.$$

Soit :

La probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais à l'origine » est égale à $|q - p|$.

Q33. Rarement traitée. La description de l'évènement étudié a pausé problème.

IV Loi de l'arcsinus**Partie IV**

Cette dernière partie de sujet n'a été abordée que dans 38 % des copies.

IV.A –

Dans toute la suite, pour on appellera *chemin (de longueur n)* entre $(0, z_0)$ et (n, z_n) un n -uplet de la forme $((0, z_0), (1, z_1), (2, z_2), \dots, (n, z_n))$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = z_i - z_{i-1} \in \{-1, 1\}$. Un tel chemin est vu comme une suite de n déplacements, toujours de $+1$ en abscisse et de -1 ou $+1$ en ordonnée.

IV.A.1)

Q34. Soit C un chemin (de longueur n) entre $(0, 0)$ et (n, x) . Notons $a \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le nombre de déplacements de $+1$ en ordonnée dans ce chemin. Le nombre de déplacements de -1 en ordonnée est alors égal à $n - a$, donc l'ordonnée finale x vaut $x = a \times (+1) + (n - a) \times (-1) = 2a - n$.

On a alors $n - x = 2(a - x)$, qui est donc forcément pair. De plus avec $0 \leq a \leq n$ et $x + n = 2a$, on doit aussi avoir $0 \leq x + n \leq 2n$, soit $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$. Ainsi, si $n - x$ est impair ou $x \notin \llbracket -n, n \rrbracket$, il n'y a pas de chemin possible entre $(0, 0)$ et (n, x) , donc $N_{n,x} = 0$.

Si maintenant, $n - x$ est pair et $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$, alors le nombre $N_{n,x}$ de chemins entre $(0, 0)$ et (n, x) est égal au nombre de façons de choisir les $a = \frac{x + n}{2}$ déplacements de $+1$ en ordonnée parmi les n

déplacements (les $n-p$ autres étant forcément de -1 en ordonnée). Ceci revient à $N_{n,x} = \binom{n}{a}$ avec

$a = \frac{x+n}{2}$. Finalement, on a bien :

$$N_{n,x} = \begin{cases} \binom{n}{a} & \text{quand } n-x \text{ est pair et } x \in \llbracket -n, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q34. - Q36. À nouveau, manque de formalisation pour ce dénombrement classique. Beaucoup de verbiage pour paraphraser l'énoncé. L'équiprobabilité des chemins pour **Q35.** était attendue.

Q35. L'évènement $(S_n = x)$ est la réalisation d'un chemin (de longueur n) entre $(0,0)$ et (n,x) . Comme tous les chemins sont équiprobables, on peut utiliser la formule :

$$P(S_n = x) = \frac{\text{nombre de chemins entre } (0,0) \text{ et } (n,x)}{\text{nombre total de chemins partant de l'origine et de longueur } n}$$

Or, le nombre total de chemins de longueur n partant de $(0,0)$ est 2^n (il y a deux choix à chaque déplacement) et on vient de voir que le nombre de chemins entre $(0,0)$ et (n,x) est $N_{n,x}$. Ainsi :

$$P(S_n = x) = \frac{N_{n,x}}{2^n} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{x+n}{2}} \frac{1}{2^n} & \text{quand } n-x \text{ est pair et } x \in \llbracket -n, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q36. On a vu dans la question **Q23** que $S_n = 2U_n - n$ où $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(X_k + 1)$ suit la loi binomiale de paramètres n et p , avec $p = \frac{1}{2}$ ici. Alors :

$$P(S_n = x) = P(2U_n - n = x) = P\left(U_n = \frac{n+x}{2}\right).$$

Et cette probabilité n'est non nulle que si $\frac{n+x}{2} \in \llbracket 0, n \rrbracket$ soit $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et $n-x$ est pair, et dans ce cas, on a :

$$P\left(U_n = \frac{n+x}{2}\right) = \binom{n}{\frac{x+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{x+n}{2}} = \binom{n}{\frac{x+n}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

On retrouve alors :

$$P(S_n = x) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{x+n}{2}} \frac{1}{2^n} & \text{quand } n-x \text{ est pair et } x \in \llbracket -n, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

IV.A.2)

Q37. Notons $C(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ un chemin $(0, z_0), (1, z_1), \dots, (k, z_k), \dots, (n-1, z_{n-1}), (n, y)$ reliant les points $(0, z_0)$ et (n, y) . Appelons E_+ l'ensemble des chemins reliant $(0, x)$ et (n, y) tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 et E_- l'ensemble des chemins reliant $(0, -x)$ et (n, y) .

Soit ϕ l'application définie sur E_+ qui à tout chemin $C = C(x, z_1, \dots, z_{p-1}, 0, z_{p+1}, \dots, z_{n-1})$ de E_+ , où $(p, 0)$ est le premier point d'ordonnée 0, associe le chemin :

$$C(-x, -z_1, \dots, -z_{p-1}, 0, z_{p+1}, \dots, z_{n-1}).$$

Comme p existe et est unique, l'application ϕ est bien définie sur E_+ . De plus, l'image de tout chemin de E_+ est un chemin reliant $(0, -x)$ et (n, y) , donc ϕ est à images dans E_- .

Remarquons qu'avec les notations ci-dessus, on a $z_k \neq 0$, donc $-z_k \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, et $(p, 0)$ est aussi le premier point d'ordonnée 0 de l'image du chemin C considéré.

Soient C et D deux chemins de E_+ tels que $\phi(C) = \phi(D)$. D'après ce que l'on vient de voir, le premier point d'ordonnée 0 de C et D est le même, noté $(p, 0)$. Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C &= C(x, z_1, \dots, z_{p-1}, 0, z_{p+1}, \dots, z_{n-1}) \\ D &= C(x, t_1, \dots, t_{p-1}, 0, t_{p+1}, \dots, t_{n-1}) \end{aligned}$$

Et $\phi(C) = \phi(D)$ devient :

$$C(-x, -z_1, \dots, -z_{p-1}, 0, z_{p+1}, \dots, z_{n-1}) = C(-x, -t_1, \dots, -t_{p-1}, 0, t_{p+1}, \dots, t_{n-1})$$

Soit $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, -z_k = -t_k \\ \forall k \in \llbracket p, n-1 \rrbracket, z_k = t_k \end{cases}$, autrement dit $z_k = t_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, donc $C = D$ et ainsi :

ϕ est injective.

De plus, tout chemin $C' = C(-x, u_1, \dots, u_{n-1})$ de E_- , partant de $(0, -x)$ d'ordonnée strictement négative et arrivant à (n, y) d'ordonnée strictement positive doit traverser l'axe des abscisses, donc doit passer par un point de la forme $(p, 0)$. Et, si $(p, 0)$ est le premier point d'ordonnée $z_p = 0$ du chemin, alors on a $C' = C(-x, u_1, \dots, u_{p-1}, 0, u_{p+1}, \dots, u_{n-1})$ avec $u_k < 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ (s'il y en a). On a alors $C' = \phi(C)$ avec $C = C(x, -u_1, \dots, -u_{p-1}, 0, u_{p+1}, \dots, u_{n-1}) \in E_+$ et ainsi :

ϕ est surjective.

Finalement, ϕ réalise une bijection de E_+ dans E_- (tous deux finis), donc E_+ et E_- ont le même cardinal, autrement dit :

Le nombre de chemins reliant $(0, x)$ et (n, y) , tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ et (n, y) .

Q37. - Q42. Questions délicates qui ont permis de mettre en avant les bons candidats.

IV.A.3)

Q38. Remarquons que le nombre de chemins reliant $(1,1)$ à (n,x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est le même que le nombre de chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,x)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses : il suffit de translater par le vecteur $(-1,0)$.

De plus, le nombre recherché de chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,x)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à $T - A$ où T est le nombre total de chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,x)$ et A est le nombre de chemins reliant $(0,1)$ et $(n-1,x)$ et passant au moins une fois par l'axe des abscisses.

Par le principe de réflexion, A est aussi égal au nombre total de chemins reliant $(0,-1)$ et $(n-1,x)$.

Enfin, avec la translation de vecteur $(0,-1)$, on peut conclure que T est égal au nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(n-1,x-1)$, soit $N_{n-1,x-1}$ et avec la translation de vecteur $(0,1)$, on peut conclure que A est égal au nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(n-1,x+1)$, soit $N_{n-1,x+1}$.

Ainsi, le nombre de chemins reliant $(1,1)$ à (n,x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est bien :

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}$$

Q39. On a $S_1 = X_1$, donc $(S_1 > 0) = (X_1 > 0) = (X_1 = 1)$ et :

$$P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) = P(S_1 > 0) P_{(S_1 > 0)}([S_2 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]).$$

Or, si $(S_1 > 0) = (X_1 = 1)$ est réalisé, alors réaliser l'évènement $[S_2 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]$ revient à effectuer un chemin de longueur $2n-1$ entre $(1,1)$ et $(2n,2k)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses (donc toutes les ordonnées restent strictement positives). Il y a en tout 2^{2n-1} chemins reliant $(1,1)$ et $(2n,2k)$, et d'après la question précédente, il y a $N_{2n-1,2k-1} - N_{2n-1,2k+1}$ chemins reliant $(1,1)$ et $(2n,2k)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses. Comme on est en situation d'équiprobabilité et avec $P(S_1 > 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) = \frac{1}{2} \frac{N_{2n-1,2k-1} - N_{2n-1,2k+1}}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{N_{2n-1,2k-1}}{2^{2n-1}} - \frac{N_{2n-1,2k+1}}{2^{2n-1}} \right).$$

Enfin, d'après la question **Q35**, on a $P(S_{2n-1} = 2k-1) = \frac{N_{2n-1,2k-1}}{2^{2n-1}}$ et $P(S_{2n-1} = 2k+1) = \frac{N_{2n-1,2k+1}}{2^{2n-1}}$, d'où :

$$P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) = \frac{1}{2} (P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1))$$

Q40. On a $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = k]$, mais si k est impair, $[S_{2n} = k]$ est impossible (question **Q35**), donc on a bien $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$. De plus cette union est disjointe.

On a alors :

$$[S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k].$$

Et l'union est disjointe, donc par σ -additivité et avec la question précédente :

$$\begin{aligned} P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (P(S_{2n-1} = 2k-1) - P(S_{2n-1} = 2k+1)) \end{aligned}$$

D'après la question **Q35**, on a $P(S_{2n-1} = 2k+1) = 0$ dès que $2k+1 > 2n-1$, soit $k \geq n$.

Par télescopage, on obtient alors :

$$P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) = \frac{1}{2} P(S_{2n-1} = 1).$$

Et toujours avec la question **Q35**, on a :

$$P(S_{2n-1} = 1) = \binom{2n-1}{n} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!2n} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{1}{2^{2n}} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = P(S_{2n} = 0).$$

Et ainsi :

$$P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) = \frac{1}{2} P(S_{2n} = 0)$$

Réaliser l'évènement $[S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]$ revient à effectuer un chemin de longueur $2n$ entre $(0,0)$ et $(2n,x)$ en restant toujours strictement au-dessus de l'axe des abscisses à partir du premier déplacement (toutes les ordonnées sont strictement positives).

Or, tout chemin de longueur $2n$ entre $(0,0)$ et $(2n,x)$ en restant toujours strictement en-dessous de l'axe des abscisses à partir du premier déplacement (toutes les ordonnées sont strictement négatives, c'est l'évènement $[S_1 < 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} < 0] \cap [S_{2n} < 0]$) est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses d'un chemin de longueur $2n$ entre $(0,0)$ et $(2n,x)$ en restant toujours strictement au-dessus de l'axe des abscisses à partir du premier déplacement. Il y en a donc le même nombre et ainsi :

$$P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) = P([S_1 < 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} < 0] \cap [S_{2n} < 0]).$$

Or, réaliser l'évènement $[S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]$ revient à effectuer un chemin de longueur $2n$ entre $(0,0)$ et $(2n,x)$ en restant toujours strictement du même côté de l'axe des abscisses à partir du premier déplacement (les ordonnées sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives). Ainsi :

$$\begin{aligned} ([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) \\ = ([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) \cup ([S_1 < 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} < 0] \cap [S_{2n} < 0]) \end{aligned}$$

Et cette union est disjointe. On a donc :

$$\begin{aligned} P([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) \\ = P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) + P([S_1 < 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} < 0] \cap [S_{2n} < 0]) \\ = 2P([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) \end{aligned}$$

Soit :

$$P([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) = P(S_{2n} = 0)$$

Q41. Par définition de T_{2n} , on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(T_{2n} = 2k) = (S_{2k} = 0) \cap (S_{2k+1} \neq 0) \cap \dots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap (S_{2n} \neq 0).$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(T_{2n} = 2k) &= P([S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) \\ &= P(S_{2k} = 0) P_{(S_{2k}=0)}([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]). \end{aligned}$$

Or, si le point mobile est en $(2k, 0)$, le nombre de chemins reliant $(2k, 0)$ à un point d'abscisse $2n$ sans recroiser l'axe des abscisses et le même que le nombre de chemins reliant $(0, 0)$ à un point d'abscisse $2n - 2k$ sans recroiser l'axe des abscisses (il suffit de faire la translation de vecteur $(-2k, 0)$ pour passer de l'un à l'autre). Ainsi :

$$P_{(S_{2k}=0)}([S_{2k+1} \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) = P([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]).$$

Et donc :

$$P(T_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0) \times P([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-2k} \neq 0])$$

Q42. D'après les deux questions précédentes, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(T_{2n} = 2k) = P(S_{2k} = 0) \times P(S_{2n-2k} = 0).$$

Et d'après la question **Q35**, $P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}$ et $P(S_{2n-2k} = 0) = \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}}$, donc :

$$P(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \times \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n-2k}}.$$

Soit :

$$P(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}$$

IV.C –

Q43. La fonction f est continue sur $[0, \alpha[$, $[\alpha, \beta]$ et $]\beta, 1]$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = f(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x) = f(\beta) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$, donc f est continue sur $[0, 1]$.

On peut alors utiliser la propriété sur les sommes de Riemann disant que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Comme $0 < \alpha < \beta < 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor n\alpha \rfloor = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \lfloor n\beta \rfloor) = +\infty.$$

Donc, à partir d'un certain rang, on a $1 < \lfloor n\alpha \rfloor + 1 < \lfloor n\beta \rfloor < n$ et on peut écrire :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\beta \rfloor + 1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- si $1 \leq k \leq \lfloor n\alpha \rfloor \leq n\alpha$, on a $1 \leq \frac{k}{n} \leq \alpha$ et donc $f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\alpha)$;
- si $n\alpha < \lfloor n\alpha \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor n\beta \rfloor \leq n\beta$, on a $\alpha < \frac{k}{n} \leq \beta$ et donc $f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} = \frac{n}{\sqrt{k(n-k)}} ;$
- si $n\beta < \lfloor n\beta \rfloor + 1 \leq k \leq n$, on a $\beta < \frac{k}{n} \leq 1$ et donc $f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\beta)$.

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor n\alpha \rfloor} f(\alpha) + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{n}{\sqrt{k(n-k)}} + \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n\beta \rfloor + 1}^n f(\beta) \\ &= \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} f(\alpha) + \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} + \frac{n - \lfloor n\beta \rfloor}{n} f(\beta) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^\beta f(t) dt + \int_\beta^1 f(t) dt = \int_0^\alpha f(\alpha) dt + \int_\alpha^\beta f(t) dt + \int_\beta^1 f(\beta) dt \\ &= \alpha f(\alpha) + \int_\alpha^\beta f(t) dt + (1-\beta) f(\beta) \end{aligned}$$

Et comme $n\alpha - 1 < \lfloor n\alpha \rfloor \leq n\alpha$, on a $\alpha - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} \leq \alpha$ et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} f(\alpha) = \alpha f(\alpha).$$

De même, $\beta - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} \leq \beta$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \lfloor n\beta \rfloor}{n} f(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right) f(\beta) = (1-\beta) f(\beta).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n} f(\alpha) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \lfloor n\beta \rfloor}{n} f(\beta) \\
 &= \alpha f(\alpha) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + (1-\beta) f(\beta) \\
 &= \alpha f(\alpha) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} + (1-\beta) f(\beta) \\
 &= \int_0^1 f(t) dt = \alpha f(\alpha) + \int_\alpha^\beta f(t) dt + (1-\beta) f(\beta)
 \end{aligned}$$

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta f(t) dt = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

Q43. - Q44. Les candidats à l'aise en analyse ont trouvé ici chaussure à leur pied. Parfois des tentatives de grappillage de candidats désœuvrés. On rappelle que le théorème sur les sommes de Riemann a des hypothèses.

Q44. D'après la question **Q22** :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \left(1 + \frac{1}{24n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1 + \frac{1}{24n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{2}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} \\
 &= \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{1}{24n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{6n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
 &= \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{1}{24n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{8n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)}{8n}\right)
 \end{aligned}$$

Autrement dit, $\varepsilon_n = 8n \left[1 - \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \binom{2n}{n}\right] 1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right) \right)$$

Q45. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} &= \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k}\right) \frac{4^{n-k}}{\sqrt{\pi(n-k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)}\right) \frac{1}{4^n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor+1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{8k} - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} + \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} \frac{\varepsilon_k}{8k}\right)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right| = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \left(\frac{\varepsilon_k}{8k} + \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} - \frac{\varepsilon_{n-k}}{8(n-k)} \frac{\varepsilon_k}{8k} \right) \right|.$$

D'où :

$$\left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right| \leq \frac{1}{8\pi} \left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \left(\frac{|\varepsilon_k|}{k} + \frac{|\varepsilon_{n-k}|}{n-k} + \frac{|\varepsilon_k \varepsilon_{n-k}|}{8k(n-k)} \right) \right|.$$

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle est bornée et il existe un réel $M \geq 0$ tel que $|\varepsilon_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket \lfloor n\alpha \rfloor + 1, \lfloor n\beta \rfloor \rrbracket$, on a $k > n\alpha > 0$ et $n-k \geq n-n\beta > 0$, donc :

$$\left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \frac{|\varepsilon_k|}{k} \right| \leq \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{M}{(n\alpha)^{3/2} \sqrt{n-n\beta}} \leq \frac{M(\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor)}{(n\alpha)^{3/2} \sqrt{n-n\beta}} \leq \frac{M}{\alpha^{3/2} \sqrt{1-\beta}} \frac{n}{n^2}.$$

Et, comme $\frac{M}{\alpha^{3/2} \sqrt{1-\beta}} \frac{n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a par comparaison :

$$\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \frac{|\varepsilon_k|}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De même :

- $\left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \frac{|\varepsilon_{n-k}|}{n-k} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{\alpha}(1-\beta)^{3/2}} \frac{n}{n^2}$ et $\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \frac{|\varepsilon_k|}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- $\left| \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \frac{|\varepsilon_k \varepsilon_{n-k}|}{8k(n-k)} \right| \leq \frac{M^2}{\alpha^{3/2}(1-\beta)^{3/2}} \frac{n}{n^3}$ et $\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \frac{|\varepsilon_k \varepsilon_{n-k}|}{8k(n-k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \left(\frac{|\varepsilon_k|}{k} + \frac{|\varepsilon_{n-k}|}{n-k} + \frac{|\varepsilon_k \varepsilon_{n-k}|}{8k(n-k)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) = 0$$

Q45. - Q46. Seules les très bonnes copies (une quarantaine) traitent ces questions.

Q46. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta] \right) = (T_{2n} \in [2n\alpha, 2n\beta]) = \bigcup_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} (T_{2n} = 2k).$$

L'union est disjointe, donc par σ -additivité, on peut écrire :

$$P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} P(T_{2n} = 2k).$$

Et, d'après la question **Q42** :

$$P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}.$$

Or, d'après les questions **Q42** et **Q45** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{n-k}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Et en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{\pi} [\arcsin u]_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha}) \right)}$$