



Devoir surveillé n° 7 Concours blanc

Corrigé

SUJET 1, uniquement pour les élèves non étoilés

EXERCICE 1

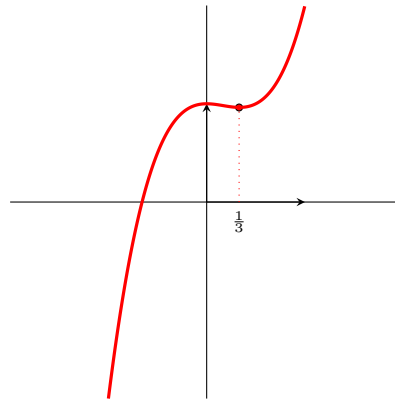
Extrema sur un disque fermé

D'après

Concours E3A

Session 2025 - Filière PC

- Q.1.** φ est dérivable sur $[-1; 1]$ et, pour tout $t \in [-1; 1]$, $\varphi'(t) = 6t^2 - 2t = 2t(3t - 1)$.
 φ est donc croissante sur $[-1; 0]$, décroissante sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$:



- Q.2.** f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$.

On en déduit facilement que

$(0, 0)$ est l'unique point critique de f .

- Q.3.** On observe que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t, 0) - f(0, 0) = t^3$ n'est pas de signe constant, y compris au voisinage de 0. La valeur de $f(0, 0)$ n'est donc pas un extremum local pour f .

Or, si f admettait un extremum local, celui-ci serait atteint en un point critique. Comme, au niveau de notre point critique, f n'admet pas d'extremum local, elle n'en admet nulle part sur $\mathbb{R}^2$.

- Q.4.** $\mathcal{D}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ (presque par définition). Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, et comme f est continue sur $\mathcal{D}$, on en déduit que f est bornée sur $\mathcal{D}$ et atteint ses bornes sur cet ensemble, autrement dit

f admet des extremums globaux sur $\mathcal{D}$.

Q.5. Notons $\mathcal{D}'$ le disque ouvert de centre O et de rayon 2, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2.

On observe que $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{C}$, et que $\mathcal{D}'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{D}'$ n'est autre que l'intérieur de $\mathcal{D}$, et $\mathcal{C}$ sa frontière). Sur cet ouvert, f est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc, si nos extrema étaient atteints sur $\mathcal{D}'$, ils seraient atteints en un point critique de f . Or $(0, 0)$ est l'unique point critique de f : il appartient à $\mathcal{D}'$, mais f n'y admet pas d'extremum local (et encore moins global).

Par conséquent, puisque f admet des extrema globaux sur $\mathcal{D}$, et ceux-ci n'étant pas atteints sur $\mathcal{D}'$,

les extrema globaux de f sont forcément atteints sur $\mathcal{C}$.

Q.6. $f(M) = (2 \cos(\alpha))^3 + (2 \sin(\alpha))^2 = 8 \cos^3(\alpha) + 4 \sin^2(\alpha) = 8 \cos^3(\alpha) + 4(1 - \cos^2(\alpha)) = 4(2 \cos^3(\alpha) - \cos^2(\alpha) + 1)$, donc

$$f(M) = 4\varphi(\cos(\alpha)).$$

Q.7. D'après le travail effectué en question préliminaire, φ atteint son minimum en -1 (et $\varphi(-1) = -2$) et son maximum en 1 (et $\varphi(1) = 2$).

Ainsi, f atteint son minimum au point $M = (2 \cos(\alpha), 2 \sin(\alpha))$ lorsque $\alpha = \pi$, c'est-à-dire en $M = (-2, 0)$ (et ce minimum vaut -8) et f atteint son maximum au point $M = (2 \cos(\alpha), 2 \sin(\alpha))$ lorsque $\alpha = 0$, c'est-à-dire en $M = (2, 0)$ (et ce maximum vaut 8).

EXERCICE 2

Fonction de Bessel

D'après

Concours CCINP

Session 2023 - Filière PSI

Q.8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ (en tant que composée de l'application $t \mapsto x \sin(t)$, continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et du cosinus qui est continu sur $\mathbb{R}$), donc l'intégrale $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et même absolument, ce qui servira dans la question suivante si l'on veut utiliser les énoncés au programme). Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q.9. Nous allons utiliser le théorème dérivation multiple des intégrales à paramètres. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, posons :

$$g(x, t) = \cos(x \sin(t)).$$

Alors :

- pour tout $t \in [0, \pi]$, l'application $x \mapsto \cos(x \sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x \sin(t)$ et le cosinus le sont (ce sont des fonctions usuelles), et on a pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto g(x, t) = \cos(x \sin(t))$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, \pi]$, comme on l'a justifié dans la question précédente ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, un raisonnement analogue assure que $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t))$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, \pi]$ (la seule différence avec $t \mapsto g(x, t)$ est la multiplication par $t \mapsto -\sin(t)$, qui est aussi une fonction continue ; on a ainsi une fonction continue par morceaux sur un segment, donc intégrable) ;

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$ (c'est toujours le même raisonnement), et on a pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$:

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 1 \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

or l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est trivialement continue par morceaux sur le segment $[0, \pi]$: elle y est donc intégrable.

Toutes les hypothèses du théorème de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètres sont vérifiées. On en déduit d'une part que $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ est intégrable sur $[0, \pi]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ce qui était trivial), et d'autre part que l'on peut dériver sous le signe intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt, \quad f''(x) = \int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt,$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(t) \sin(x \sin(t)) dt, \quad f''(x) = \int_0^\pi -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) dt.$$

Q.10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les applications cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, $t \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\frac{\partial h}{\partial t}$ existe. On a par ailleurs :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) + x(\cos(t))^2 \cos(x \sin(t)).$$

Par anticipation sur la question suivante, remarquons qu'il apparaît $\frac{\partial g}{\partial x}$ (où g a été définie dans la résolution de la question précédente). Mieux : en écrivant : $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on a pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) + x \cos(x \sin(t)) - x(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)),$$

c'est-à-dire :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) + xg(x, t) + x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \quad (1)$$

Q.11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, avec les notations des questions précédentes :

$$\begin{aligned} xf''(x) + f'(x) + xf(x) &\stackrel{[9]}{=} x \int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt + \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt + x \int_0^\pi g(x, t) dt \\ &= \int_0^\pi \left(x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) + xg(x, t) \right) dt \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt \\ &= [h(x, t)]_0^\pi \\ &= h(x, \pi) - h(x, 0) \\ &= -\sin(x \sin(\pi)) - \sin(x \sin(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi

f vérifie bien l'équation différentielle (E),

ce qu'il fallait démontrer.

Q.12. Soit S la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Alors S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et dérivable terme à terme, en tant que fonction développable en série entière, et on a :

$$\forall x \in] -R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R, R[$, après un changement d'indice adéquat :

$$\begin{aligned}
xS''(x) + S'(x) + xS(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) n a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n + a_1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}) x^n + a_1.
\end{aligned}$$

On en déduit que S vérifie (E) sur $] - R, R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}) x^n + a_1 = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, S vérifie (E) sur $] - R, R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0, \end{cases}$$

d'où le résultat, après avoir isolé a_{n+1} dans la deuxième égalité, puis remplacé n par $n-1$ dans la deuxième égalité (il faut et suffit alors d'avoir $n \geq 2$ pour que $n-1$ soit dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Q.13. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) \, dt = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} \, dt.$$

Justifions l'interversion de la somme et de l'intégrale, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment, dont nous allons vérifier les hypothèses. Posons :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, \pi], \quad f_n(t) = (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est évidemment continue (par morceaux) sur $[0, \pi]$. Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$, en montrant qu'elle converge normalement sur cet intervalle. On a :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0, \pi], \quad |f_n(t)| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Cette majoration est indépendante de la variable t . Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ converge : il s'agit du développement en série entière du cosinus hyperbolique évalué en $|x|$, dont on sait qu'il converge en tout nombre réel. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0, \pi]$, et sa somme est continue (par morceaux) puisqu'il s'agit de $t \mapsto \cos(x \sin(t))$.

Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^\pi f_n$ converge, et d'autre part :

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi (-1)^n \frac{(x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} dt,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

d'où le résultat.

Q.14. Nous avons démontré dans la question 12 que si $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est développable en série entière et solution de (E) au voisinage de 0, alors on a nécessairement : $a_1 = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$. Nous allons montrer de plus que si : $S(0) = \pi$, alors ses coefficients vérifient nécessairement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k} (k!)^2},$$

ce qui montre bien qu'il existe au plus une fonction développable en série entière à être solution de (E) et à vérifier $S(0) = \pi$ (la fonction en question étant celle dont les coefficients ont l'expression ci-dessus). Pour comprendre comment l'on conjecture ces valeurs, voir la remarque à la fin de la résolution de cette question.

Nous allons démontrer cette affirmation par récurrence sur k . Soit $\mathcal{P}_k$ la proposition ci-dessus. Pour $k = 0$, on sait déjà qu'on a $a_{2 \times 0 + 1} = a_1 = 0$, tandis que : $a_{2 \times 0} = a_0 = S(0) = \pi = \frac{(-1)^0 \pi}{2^{2 \times 0} (0!)^2}$. D'où $\mathcal{P}_0$, ce qui initialise la propriété.

Montrons qu'elle est héréditaire : soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $\mathcal{P}_k$. Alors :

$$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+1+2} \stackrel{[12]}{=} -\frac{1}{(2k+1+2)^2} a_{2k+1} \stackrel{[\mathcal{P}_k]}{=} -\frac{1}{(2k+1+2)^2} \times 0 = 0,$$

et :

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} \stackrel{[12]}{=} -\frac{1}{(2k+2)^2} a_{2k} \stackrel{[\mathcal{P}_k]}{=} -\frac{1}{2^2 (k+1)^2} \times \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{(-1)^{k+1} \pi}{2^{2(k+1)} ((k+1)!)^2},$$

donc on a bien :

$$a_{2(k+1)+1} = 0, \quad a_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1} \pi}{2^{2(k+1)} ((k+1)!)^2},$$

ainsi $\mathcal{P}_k$ implique $\mathcal{P}_{k+1}$: on a montré l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a obtenu les expressions de a_{2k} et a_{2k+1} annoncées, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déduisons-en le résultat de l'énoncé : la question 11 montre que f est une solution de (E), et la question 13 qu'elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$f(0) = \int_0^\pi \cos(0) dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi,$$

donc f est une fonction développable en série entière, solution de (E), qui vérifie : $f(0) = \pi$. Par unicité d'une telle fonction (obtenue par l'explicitation des coefficients a_n ci-dessus), on a donc nécessairement, pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k},$$

ce qui montre bien le résultat voulu (et même un peu plus).

Remarque. Il n'y a ici pas besoin de vérifier réciproquement que la série entière $\sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k}$ est bien de rayon de convergence non nul : si ce n'était pas le cas, alors il n'existerait pas du tout de fonction développable en série entière et solution de (E)... Or on sait qu'il en existe, puisque f en est une. Par l'absurde, le rayon de convergence est non nul (et c'est $+\infty$ puisque f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$).

Q.15. Les deux questions précédentes montrent que l'on a, pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Après simplifications, cela donne le résultat demandé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

EXERCICE 3

Une matrice de produit scalaire

D'après

Concours E3A

Session 2025 - Filière PC

Q.16. Puisque $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, il est facile de voir que $\text{Im}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, d'en déduire que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \text{Im}(J)$$

(c'est une famille génératrice formée d'un seul vecteur non nul), et que

$$\text{rg}(J) = 1.$$

Q.17. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \text{Ker}(J) \iff JX = 0_{n1} \iff x_1 + \cdots + x_n = 0 \iff x_1 = -x_2 - \cdots - x_n$$

$$\text{Ainsi, } \text{Ker}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - \cdots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est donc une famille génératrice de $\text{Im}(J)$, et comme elle est formée de $n - 1$ vecteurs, et

puisque, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(J)) = n - 1$, c'est une base de $\text{Ker}(J)$.

Q.18. J est une matrice symétrique réelle : par le théorème spectral, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.19. $\text{Ker}(J)$ est le sous-espace propre de J associé à la valeur propre 0 : on l'a entièrement déterminé en **Q.17**.

D'autre part, si on note λ la « dernière » valeur propre de J , $\text{tr}(J) = \underbrace{0 + \dots + 0}_{n-1 \text{ termes}} + \lambda$, donc $\lambda = n$. Il est facile de

constater que $J \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, si bien que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_n(J)$. J étant diagonalisable, on montre rapidement que

$\dim(E_n(J)) = 1$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une base de cet espace propre.

J est donc semblable à la matrice $D = \text{diag}(0, \dots, 0, n)$.

Q.20. On a montré que $\text{Im}(J) = \text{Vect}(e)$, où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(J) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) ; x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$.

Or, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $x_1 + \dots + x_n = 0$ si et seulement si $(X | e) = 0$.

Par conséquent, $\text{Ker}(J) = \{e\}^\perp = \text{Vect}(e)^\perp = \text{Im}(J)^\perp$.

Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on en déduit que $\text{Im}(J)$ et $\text{Ker}(J)$ sont orthogonaux (donc) supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Q.21. $M_r = rJ + (1-r)I_n \in \text{Vect}(J, I_n)$.

Q.22. Notons P une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = D$ (vue en **Q.19**).

$P^{-1}MP = P^{-1}(rJ + (1-r)I_n)P = rP^{-1}JP + (1-r)P^{-1}I_nP = rD + (1-r)I_n$, et comme $rD + (1-r)I_n$ est une matrice diagonale (que l'on peut noter Δ_r), cette égalité justifie la diagonalisabilité de M_r .

Q.23. Pour tout $(Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_r(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = X^\top M_r(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 X^\top M_r Y_1 + \lambda_2 X^\top M_r Y_2 = \lambda_1 f_r(X, Y_1) + \lambda_2 f_r(X, Y_2).$$

$Y \mapsto f_r(X, Y)$ est donc une application linéaire.

De plus, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, $f_r(X, Y) = (X | M_r Y) \in \mathbb{R}$, donc $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$: il s'agit d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Q.24. Pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$f_r(X, Y) = (X | M_r Y) = (M_r Y | X) = (M_r Y)^\top X = \underbrace{Y^\top M_r^\top X}_{\text{car } M_r \text{ est symétrique}} = Y^\top M_r X = f_r(Y, X)$$

Q.25. Puisque J est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, la matrice P introduite en **Q.22** peut être supposée orthogonale. Par conséquent, en notant $Q = P^{-1} = P^\top$, il vient, pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$f_r(X, Y) = X^\top P \Delta_r P^{-1} Y = X^\top Q^\top \Delta_r Q Y = (QX)^\top \Delta_r QY.$$

On obtient ainsi le résultat voulu.

Q.26. On a vu en 8.2 que f_r est symétrique, et en 8.1 qu'elle est linéaire selon sa deuxième variable, donc (par symétrie) bilinéaire.

De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, en notant $X' = PX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} f_r(X, X) &= (X')^\top \Delta_r X' = (X')^\top (rD + (1-r)I_n) X' = r(X')^\top D X' + (1-r)(X')^\top X' \\ &= (1-r)x_1'^2 + \dots + (1-r)x_{n-1}'^2 + (rn+1-r)x_n'^2 \end{aligned}$$

P étant inversible, $X = 0$ si et seulement si $X' = 0$.

Ainsi, pour que f_r soit défini-positif, il faut et il suffit que $1-r > 0$ et $rn+1-r > 0$, c'est-à-dire que $-\frac{1}{n-1} < r < 1$.

Finalement,

f_r est un produit scalaire si et seulement si $-\frac{1}{n-1} < r < 1$.

EXERCICE 4

Un jeu de société

D'après

Concours CCINP
Session 2023 - Filière PC

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Q.27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n représente l'avancement relatif à l'étape n .

S_n représente l'avancement absolu (i.e la position) à l'étape n .

Q.28. T représente « le temps d'attente » pour dépasser A , c'est à dire le premier (le plus petit) n tel que $S_n \geq A$.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

Q.29. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $f^{(p)}$ existe sur $] -1, 1[$ et que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

Initialisation pour $p = 0$: c'est la définition de f .

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, supposons la propriété vraie au rang p .

On a alors $f^{(p)}$ qui est dérivable sur $] -1, 1[$ comme fonction rationnelle à dénominateur non nul, ainsi $f^{(p+1)}(x) =$

$$(f^{(p)})'(x) = \frac{d}{dx} p!(1-x)^{-(p+1)} = p!(-1)(-(p+1))(1-x)^{-(p+2)} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$$

Conclusion : Par principe de récurrence le résultat est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q.30. Soit $p \in \mathbb{N}$ « fixé ». Posons pour tout $n \geq p$, $a_n = \binom{n}{p} > 0$.

Les coefficients étant strictement positifs, nous pouvons appliquer la règle de D'Alembert sans la variable x pour déterminer R le rayon de convergence : Par expression en factorielles des combinaisons et simplification :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+1-p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi $R = \frac{1}{1} = +1$.

En conclusion :

le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

Q.31. D'abord par développement en série entière usuel, f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Ensuite soit $p \in \mathbb{N}$; par théorème de dérivation des séries entières on peut dériver f p fois terme à terme sur l'ouvert de convergence ce qui donne

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} p! \binom{n}{p} x^{n-p}.$$

Enfin nous avons l'expression de $f^{(p)}$ obtenue à **Q.28**. Il suffit alors de multiplier par x^p et diviser par $p!$ pour obtenir :

$$\forall x \in] - 1, 1[, \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q.32. Remarquons que pour tout entier naturel non nul k , $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. S_n apparaît donc comme somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.$$

Q.33. En prenant la définition de T de l'énoncé :

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas :

Si le procédé s'arrête : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$ et $T(\omega) \geq A$ car « au mieux » on a avancé de +1 à chaque fois.

Si le procédé ne s'arrête pas, (cela peut arriver par exemple lorsque tous les X_k renvoient 0) alors $T(\omega) = 0$.

Ainsi

$$\text{les valeurs prises par la variable aléatoire } T \text{ sont } \{0\} \cup \llbracket A, +\infty \rrbracket.$$

Q.34. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq A$.

Vu qu'ici on ne peut qu'avancer d'un coup ou ne pas bouger à chaque étape, $(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cup (X_k = 1)$.

Ensuite les événements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants (par le lemme des coalitions), donc

$P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1)P(X_k = 1)$ et nous connaissons ces lois usuelles, nous avons bien :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

Q.35. Par **Q.31**, $P(T = 0) = 1 - P(T > 0)$. Et $P(T > 0) = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k}$.

Nous savons évaluer cette somme grâce à **Q.31** appliqué à $p = A-1$ et $x = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^{A-1}}{1/2^A}$$

et au final $P(T > 0) = 1$ et

$$P(T = 0) = 0.$$

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q.36. Exploisons ici les résultats obtenus.

La série entière définissant G_T correspond à celle de **Q.30** mais avec un facteur $\frac{1}{2^k}$. Cela assure (sans détails ...) que le rayon de convergence est $R_T = 2$.

Ensuite il suffit d'utiliser la formule de **Q.31** pour $p = A - 1$ en $\frac{x}{2}$ ($x \in]-2, 2[$ donc $x/2 \in]-1, 1[$) qui donne bien

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

Q.37. Le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie est donné par $E(T)$.

Comme $R_T = 2 > 1$, G_T est dérivable en 1, et donc $E(T) = G'_T(1)$.

$$G'_T(x) = A \left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1} \frac{2}{(2-x)^2}, \text{ ainsi}$$

$$E(T) = 2A.$$

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leq M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leq k)$

Q.38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements

$((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M - 1))$:

Soit $k \leq A - 1$, $P(S_{n+1} \leq k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} P(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell)$.

Il suffit alors de constater que :

Il est impossible que $\ell > k$

et que pour $\ell \leq k$, $(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell) = (S_n \leq k - \ell, X_{n+1} = \ell)$ qui nous ramène à deux événements indépendants (lemme des coalitions),

enfin $P(X_{n+1} = \ell) = \frac{1}{M}$,

donnant ainsi $P(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell) = P(S_n \leq k - \ell, X_{n+1} = \ell) = P(S_n \leq k - \ell) \frac{1}{M}$.

On a bien

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k P(S_n \leq k - \ell).$$

Q.39. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

Initialisation pour $n = 1$: $S_1 = X_1$ et X_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, M - 1 \rrbracket$.

Donc $P(X_1 \leq k) = \frac{k+1}{M}$. Et $\binom{k+1}{1} = k+1$.

On a bien l'égalité pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose l'égalité vraie au rang n .

Pour calculer $P(S_{n+1} \leq k)$ il suffit d'utiliser l'hypothèse de récurrence dans le résultat de **Q.38**, puis d'appliquer la formule proposée par l'énoncé en début de III.1.

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q.40. Les événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ **ne sont pas égaux**.

On a ici $(T > n) \subset (S_n < A)$ ou plus précisément $(T > n) \cup (T = 0) = (S_n < A)$.

Quand on passe alors au calcul de la somme de la série on voit bien le souci de $P(T = 0)$.

Voici (je pense) une solution :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(S_n < A) = (S_n \leq A - 1)$.

Je calcule d'abord la somme de la série des $P(S_n \leq A - 1)$ qui converge :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leq A - 1).$$

Or par **Q.39**, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leq A - 1) = \frac{1}{M^n} \binom{n+A-1}{n}$.

Cette formule reste vraie pour $n = 0$, $P(S_0 \leq A - 1) = 1$.

On utilise alors la symétrie des coefficients binomiaux, puis changement d'indice, qui nous ramène à la formule de la **Q.31** appliquée à $p = A - 1$, $x = \frac{1}{M}$ qui tous calculs faits donne la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq A - 1) = \frac{M^A}{(M - 1)^A}.$$

Or $P(T > n) \leq P(S_n \leq A - 1)$, donc la série des $P(T > n)$ converge.

Donc

l'espérance de T existe

grâce au rappel de l'énoncé.

Je dis alors que si $P(T = 0) \neq 0$ la série diverge grossièrement donc $P(T = 0) = 0$, donc $P(T > n) = P(S_n < A) = P(S_n \leq A - 1)$.

J'ai fini, il y a bien égalité :

$$E(T) = \frac{M^A}{(M - 1)^A}$$

Fin du sujet 1

SUJET 2, uniquement pour les élèves étoilés

D'après

Concours Centrale Supélec

Session 2018 - Filière PC

Épreuve de Mathématiques 1

I Préliminaires

Dans cette partie, on fixe un réel strictement positif σ .

I.A Quelques propriétés de g_σ

Q.1. Pour tout $\sigma > 0$, la fonction g_σ est continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus paire, ce qui fait qu'on l'étudiera tout le long du sujet sur $\mathbb{R}_+$.

Ses seuls problèmes d'intégrabilité sont au voisinage de $\pm\infty$. Or par croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 g_\sigma(x) = 0$$

$$\text{donc } g_\sigma(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par comparaison à une fonction de référence intégrable en $+\infty$: g_σ est intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction

g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q.2. Grâce au changement de variable affine $t = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = 1$. Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx = 1.$$

Q.3. La fonction g_σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

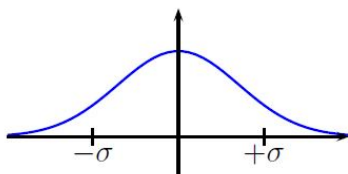
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'_\sigma(x) = -\frac{x}{\sigma^2} g_\sigma(x), \quad g''_\sigma(x) = \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4} g_\sigma(x).$$

On obtient le tableau de variations suivant, avec $g_\sigma(-\sigma) = g_\sigma(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$:

x	$-\infty$	$-\sigma$	0	σ	$+\infty$				
$g''_{\sigma}(x)$		+	0	-	0	+			
$g'_{\sigma}(x)$	0	$\nearrow$	> 0	$\searrow$	0	$\searrow$	< 0	0	
$g_{\sigma}(x)$	0	$\nearrow$	$g_{\sigma}(-\sigma)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g_{\sigma}(\sigma)$	$\searrow$	0

La dérivée seconde s'annule en exactement deux points : $-\sigma$ et σ . On obtient la courbe représentative suivante :



I.B

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q.4. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $|f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)| = |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'où

$$x \mapsto f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q.5. Posons $g(\xi, x) = f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ et utilisons le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(\cdot, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $g(\xi, \cdot)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, il vient $|g(\xi, x)| = |f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)| \leq |f(x)|$ avec f positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.$$

I.C

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Q.6. La fonction f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt = \int_0^{+\infty} f'(t) dt$ existe. Or $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ existe.

Si $\ell \neq 0$, alors $|f(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} |\ell|$. Or $\int_0^{+\infty} |\ell| dt$ diverge et $x \mapsto |\ell|$ est de signe constant donc, par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ est divergente : absurde. Par conséquent $\ell = 0$.

Il en est de même lorsque $x \rightarrow -\infty$. Finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Q.7. Puisque f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, leur transformée de Fourier est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2i\pi \xi x} dx.$$

Procédons par intégration par parties :

$$u'(x) = f'(x), \quad v(x) = e^{-2i\pi \xi x}, \quad u(x) = f(x), \quad v'(x) = -2i\pi \xi e^{-2i\pi \xi x},$$

les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il vient :

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = [f(x) e^{-2i\pi \xi x}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-2i\pi \xi) e^{-2i\pi \xi x} dx.$$

Or $|f(x) e^{-2i\pi \xi x}| = |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ d'après la question précédente, d'où

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = +2i\pi \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi \xi x} dx$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi \xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

I.D

Q.8. L'application $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et son seul problème d'intégration est en $\pm\infty$. Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{2p} \exp(-x^2) = 0$ donc $x^{2p} \exp(-x^2) = o_{\pm\infty}(\frac{1}{x^2})$. Par comparaison à la fonction de référence $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ intégrable en $\pm\infty$, la fonction $x \mapsto x^{2p} e^{-x^2}$ est intégrable en $\pm\infty$.

Finalement, pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction

$$x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q.9. Effectuons une intégration par parties en considérant :
$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^{2p+1}}{2p+1} & u'(x) = x^{2p} \\ v(x) = e^{-x^2} & v'(x) = -2x e^{-x^2} \end{cases}.$$

Cette intégration par parties est licite puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) v(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) v(x) = 0$. Il vient :

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-x^2} dx = \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} (-2x) e^{-x^2} dx = \frac{2}{2p+1} M_{p+1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, M_{p+1} = \frac{2p+1}{2} M_p.$$

On conjecture $M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$ et on le démontre par récurrence sur p .

- Initialisation : $M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ et $\frac{\sqrt{\pi}(2 \cdot 0)!}{2^{2 \cdot 0}0!} = \sqrt{\pi}$, d'où l'initialisation.

- Hérédité : Supposons $M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$. Alors :

$$M_{p+1} = \frac{2p+1}{2} \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} = \frac{\sqrt{\pi}(2p+1)!}{2^{2p+1}p!} = \frac{\sqrt{\pi}(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}.$$

Par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}.$$

Q.10. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $\forall y \in \mathbb{R}, \cos(y) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} y^{2p}$.

Pour $y = 2\pi\xi x$: $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} 2^{2p} \pi^{2p} \xi^{2p} x^{2p}$.

Enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x^2) \cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \exp(-x^2) x^{2p} \text{ avec } c_p(\xi) = (-1)^p \frac{2^{2p} \pi^{2p}}{(2p)!} \xi^{2p}.$$

Q.11. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x) dx$.

Or la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x)$ est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x) dx = 0$.

D'où, d'après la question **Q.10** : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) e^{-x^2} x^{2p} dx$. Appliquons le second théorème d'intégration terme à terme. Pour ce faire, posons $f_p : x \mapsto c_p(\xi) e^{-x^2} x^{2p}$.

- Chaque f_p est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après **Q.8**).

- La série de fonctions $\sum_p f_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, par définition, vers la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \exp(-2i\pi\xi x)$.
- Enfin, d'après la question **Q.9** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)| dx = |c_p(\xi)| M_p = \frac{2^{2p} \pi^{2p}}{(2p)!} \xi^{2p} \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p} p!} = \sqrt{\pi} \frac{(\pi^2 \xi^2)^p}{p!},$$

qui est bien le terme général d'une série (exponentielle) convergente.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et permuter somme et intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \exp(-i 2\pi \xi x) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p} dx = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) M_p.$$

Les questions **Q.9** et **Q.10** donnent les valeurs de $c_p(\xi)$ et M_p :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i 2\pi \xi x) dx = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 \xi^2).$$

Q.12. Fixons $\xi \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable affine $u = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ (donc licite) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i 2\pi \xi x) dx \\ &\stackrel{\substack{= \\ u = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}}}{=} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \exp(-i 2\pi \xi \sqrt{2}\sigma u) \sqrt{2}\sigma du \\ &\stackrel{Q_{11}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 (\sqrt{2}\sigma\xi)^2) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2 \frac{1}{(2\pi\sigma)^2}}\right) = \underbrace{\sigma' \sqrt{2\pi}}_{=\mu} g_{\sigma'}(\xi). \end{aligned}$$

Finalement

$$\text{pour } \sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}, \text{ on a } \mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}, \text{ avec } \mu = \sigma' \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}.$$

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Dans cette partie, σ désigne un réel strictement positif. On cherche les éléments f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

- (i) l'équation de diffusion : $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x);$
- (ii) les trois conditions de domination : pour tout réel $T > 0$, il existe des fonctions ϕ_T, χ_T et ψ_T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall t \in]0, T[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} |f(t, x)| \leq \phi_T(x) \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \chi_T(x) \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq \psi_T(x) \end{cases}$$

- (iii) la condition aux limites : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) = g_\sigma(x).$

Q.13. Notons $\varphi(t, x) = g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 2t} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + 2t)}\right)$. Il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{\sigma^2 + 2t} \varphi(t, x) + \frac{x^2}{(\sigma^2 + 2t)^2} \varphi(t, x) = \frac{x^2 - \sigma^2 - 2t}{(\sigma^2 + 2t)^2} \varphi(t, x).$$

En reprenant le calcul effectué à la **Q.3** :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) = \frac{x^2 - (\sigma^2 + 2t)}{(\sigma^2 + 2t)^2} \varphi(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)$$

et ainsi

φ vérifie (i).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot, x) : t \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 2t} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + 2t)}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t, x) = \varphi(0, x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = g_\sigma(x).$$

Ainsi

φ vérifie (iii).

II.A

Q.14. Soit $t > 0$ et $T = 2t$. La fonction f vérifie la condition (ii) donc il existe Φ_T continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous $t \in]0, T[$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f(t, x)| \leq \Phi_T(x)$.

Dès lors

$$|f(t, x) \exp(-2i\pi\xi x)| = |f(t, x)| \leq \Phi_T(x).$$

Par théorème de comparaison

$x \mapsto f(t, x) \exp(-2i\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q.15. L'objectif est de déterminer la limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \widehat{f}(t, \xi)$ à l'aide de la caractérisation séquentielle d'une limite.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers zéro. Notons $f_n : x \mapsto f(t_n, x) \exp(-i2\pi\xi x)$.

Afin de déterminer la limite de $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n\right)_n$, appliquons le théorème de convergence dominée (TCD).

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Soit $T > 0$ tel que $t_n \in]0, T[$ pour tout n . La fonction f vérifie la condition (ii), on peut choisir une fonction Φ_T continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $|f(t, x)| \leq \Phi_T(x)$ pour tous $t \in]0, T[$ et $x \in \mathbb{R}$.

- Bien entendu chaque f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- D'après la condition (iii), la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \mapsto g_\sigma(x) \exp(-i2\pi\xi x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in]0, T[$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq \Phi_T(x)$.

D'après le TCD, la suite $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx}_{=\widehat{f}(t_n, \xi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) \exp(-i2\pi\xi x) dx = \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi).$$

En résumé, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0, la suite $(\widehat{f}(t_n, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g_\sigma(\xi)$. Par caractérisation séquentielle des limites :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \widehat{f}(t, \xi) = \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi).$$

Q.16. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $T > 0$ et $t \in]0, T[$. Posons $\varphi : (t, x) \mapsto f(t, x) \exp(-i2\pi\xi x)$.

- Pour tout $t \in]0, T[$, la fonction $\varphi(t, \cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après **Q.14**.

- La fonction φ admet une dérivée partielle première selon t sur $]0, T[\times \mathbb{R}$, avec $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ pour tout (t, x) .
- Vérifions que la dérivée partielle satisfait les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre.
 - ★ Pour tout $t \in]0, T[$, la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
 - ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\cdot, x)$ est continue sur $]0, T[$.
 - ★ Pour $(t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}$, nous avons d'après les conditions (i) et (ii) :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \stackrel{(i)}{=} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \right| \stackrel{(ii)}{\leq} \Psi_T(x)$$

pour une certaine fonction Ψ_T positive, continue par morceaux (car continue) et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation, la fonction $\hat{f}(\cdot, x) : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, T[$ et on peut dériver sous le signe $\int$. Ceci étant vrai pour tout $T > 0$, il vient que

$$\hat{f}(\cdot, x) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

et :

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx.$$

Q.17. Par définition de la transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx = \mathcal{F} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right) (\xi).$$

Or f vérifiant la condition (i), d'où pour tous $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx \\ &= \mathcal{F} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right) (\xi) \underbrace{=}_{\text{condition (i)}} \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \cdot) \right) (\xi) \\ &\stackrel{\text{Q.7}}{=} 2i\pi\xi \mathcal{F} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot) \right) (\xi) \stackrel{\text{Q.7}}{=} (2i\pi\xi)^2 \mathcal{F} (f(t, \cdot)) (\xi) = \boxed{-4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(t, \xi)}. \end{aligned}$$

II.B

Q.18. D'après la **Q.17**, pour ξ fixé, l'application $t \mapsto \hat{f}(t, \xi)$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constant $y' + 4\pi^2 \xi^2 y = 0$. Elle est donc de la forme $t \mapsto K \exp(4\pi^2 \xi^2 t)$, la constante K étant fonction de ξ , mais *a priori* complexe.

Or $K = \lim_{t \rightarrow 0^+} K \exp(4\pi^2 \xi^2 t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) \stackrel{\text{Q.15}}{=} \widehat{g_\sigma}(\xi) \in \mathbb{R}$, on en déduit $K \in \mathbb{R}$.

Bilan :

$$\text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \text{ il existe } K(\xi) \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \hat{f}(t, \xi) = K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t).$$

Q.19. D'après la **Q.15** : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

D'après la **Q.18** : $\forall \xi \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t) = K(\xi)$.

Il s'ensuit que

$$K(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi).$$

II.C

Q.20. En **Q.12**, on a démontré que $\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$ est de la forme $\mu g_{\sigma'}(\xi)$ avec $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}$ et $\mu = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Par conséquent $\widehat{g_\sigma}(\xi) = \mu g_{\sigma'}(\xi) = \mu \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma'}\right) = \mu\sqrt{2\pi}\sigma \exp(-2\pi^2\sigma^2 x^2)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\hat{f}(t, \xi) &\stackrel{\text{Q.18}}{=} K(\xi) \exp(-4\pi^2\xi^2 t) \stackrel{\text{Q.19}}{=} \widehat{g_\sigma}(\xi) \exp(-4\pi^2\xi^2 t) \\ &= \mu\sqrt{2\pi}\sigma \exp(-2\pi^2\sigma^2\xi^2) \exp(-4\pi^2\xi^2 t) \\ &= \mu\sqrt{2\pi}\sigma \exp(-2\pi^2(\sigma^2 + 2t)\xi^2).\end{aligned}$$

Ainsi

Pour $\nu_\sigma = \mu\sqrt{2\pi}\sigma$, on a $\hat{f}(t, \xi) = \nu_\sigma \exp(-2\pi^2(\sigma^2 + 2t)\xi^2)$ pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

Q.21. D'après **Q.12** : $\nu_\sigma = \mu\sqrt{2\pi}\sigma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\sigma$ et donc

$$\nu_\sigma = 1.$$

Q.22. L'énoncé admet l'injectivité de $\mathcal{F}$ (qui est de plus linéaire par linéarité de l'intégrale).

D'après **Q.12** : $\widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = \mu g_{\sigma'}(\xi)$ pour tout ξ , avec $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2+2t}}$.

En d'autres termes : $\widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = \mu\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t} \exp(-\pi^2(\sigma^2+2t)\xi^2)$.

D'après **Q.20** : $\hat{f}(t, \xi) = \nu_\sigma \exp(-\pi^2(\sigma^2+2t)\xi^2) = \frac{\nu_\sigma}{\mu\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t}} \widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi)$.

En conséquence de quoi $\mathcal{F}(f(t, \cdot)) = \lambda_{\sigma,t} \mathcal{F}(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}})$ avec

$$\lambda_{\sigma,t} = \frac{\nu_\sigma}{\mu\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t}}.$$

Par linéarité de l'intégrale, l'opérateur $\mathcal{F}$ est linéaire donc $\mathcal{F}(f(t, \cdot)) = \mathcal{F}(\lambda_{\sigma,t} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}})$.

Enfin d'après le résultat admis par l'énoncé :

$$f(t, \cdot) = \lambda_{\sigma,t} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}.$$

Q.23. Fixons $t > 0$. D'après la **Q.17** avec $\xi = 0$: $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, 0) = 0$.

Or on remarque que $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = \hat{f}(t, 0)$.

De plus $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(t+\varepsilon) - \hat{f}(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(t+\varepsilon) - I(t)}{\varepsilon} = I'(t)$.

Subséquentement $I'(t) = 0$ et donc

$$I : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx \text{ est constante sur }]0, +\infty[.$$

Q.24. Soit $t > 0$. Il vient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx \stackrel{\text{Q.22}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) dx = \lambda_{t,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) dx = \lambda_{t,\sigma}$ d'après **Q.2**.

Ceci implique $\lambda_{t,\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = \hat{f}(t, 0) \stackrel{\text{Q.20}}{=} \nu_\sigma \stackrel{\text{Q.21}}{=} 1$. Enfin, d'après **Q.22** :

$$f(t, \cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}.$$

III Étude numérique

III.A

Q.25. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, par définition de $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ et l'hypothèse (i) sur f :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(t+\theta, x) - f(t, x)}{\theta} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x).$$

Q.26. Pour $t > 0$, la fonction $f(t, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x :

$$\begin{aligned} f(t, x+h) &= f(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \frac{h^2}{2} + o(h^2), \\ f(t, x-h) &= f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \frac{h^2}{2} + o(h^2). \end{aligned}$$

Par conséquent : $f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)h^2 + o(h^2).$

Pour $h \neq 0$: $\frac{f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + o(1).$

Finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x).$$

III.B

Q.27. Fixons $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Par définition $\frac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\delta^2} = \frac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$. Or $\frac{\tau}{\delta^2} = r$ d'où $f_{n+1}(k) - f_n(k) = r(f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1))$ puis

$$f_{n+1}(k) = r(f_n(k+1) + f_n(k-1)) + (1-2r)f_n(k).$$

Cette égalité, combinée à $f_n(0) = 0$ et $f_n(q+1) = 0$, mène au système :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(1) &= r f_n(2) + (1-2r) f_n(1), \\ f_{n+1}(2) &= r f_n(1) + r f_n(3) + (1-2r) f_n(2), \\ &\vdots \\ f_{n+1}(q-1) &= r f_n(q-2) + r f_n(q) + (1-2r) f_n(q-1), \\ f_{n+1}(q) &= r f_n(q-1) + (1-2r) f_n(q). \end{aligned}$$

Ceci s'écrit $F_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(1) \\ \vdots \\ f_{n+1}(q) \end{pmatrix} = r B \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} + (1-2r) \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}$, ou encore $F_{n+1} = r B F_n + (1-2r) F_n$,

c'est-à-dire

$$F_{n+1} = A F_n \text{ avec } A = r B + (1-2r) I_q.$$

Q.28. Les matrices A et B sont symétriques réelles : d'après le théorème spectral,

$$A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}$$

Par récurrence immédiate à l'aide de la relation $F_{n+1} = A F_n$, il vient

$$F_n = A^n F_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Q.29. Rappelons que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , alors $A^n X = \lambda^n X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\Rightarrow$ Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| > 1$, et X un vecteur propre (non nul) associé. On considère $F_0 = X$. Il vient $F_n = A^n F_0 = A^n X = \lambda^n X$ donc $\|F_n\| = |\lambda|^n \|X\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $(F_n)_n$ n'est pas bornée pour ce F_0 .

Par contraposition : si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout F_0 , alors $|\lambda| \leq 1$.

- $\Leftarrow$ Supposons que $\text{Sp}(A) \subset [-1, 1]$.

La matrice A est diagonalisable donc soit $(X_1, \dots, X_q)$ une base de $\mathbb{R}^q$ de vecteurs propres de A . Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur propre X_i .

Soit $F_0 \in \mathbb{R}^q$. En le décomposant dans la base de vecteurs propres : $F_0 = \sum_{i=1}^q \alpha_i X_i$. Ainsi, pour tout n :

$$F_n = A^n F_0 = A^n \sum_{i=1}^q \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i A^n X_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda_i^n X_i.$$

Par conséquent $\|F_n\| = \left\| \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda_i^n X_i \right\| \leq \sum_{i=1}^q |\alpha_i| \cdot |\lambda_i^n| \cdot \|X_i\| \leq \sum_{i=1}^q |\alpha_i|$ et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien bornée.

En conclusion :

$$(F_n)_n \text{ est bornée pour tout } F_0 \text{ si et seulement si } \text{Sp}(A) \subset [-1, 1].$$

Q.30. Le vecteur Y est un vecteur propre donc non nul. Il existe un indice i_0 tel que $|y_{i_0}| = \|Y\|_\infty$. L'égalité $\lambda Y = BY$ équi-

$$\text{vaut à } \begin{cases} \lambda y_1 = y_2 \\ \lambda y_2 = y_1 + y_3 \\ \vdots \\ \lambda y_{q-1} = y_{q-2} + y_q \\ \lambda y_q = y_{q-1} \end{cases} \quad \text{. Selon la valeur de } i_0 \text{ trois cas se produisent : } \begin{cases} \lambda y_{i_0} = y_2 & \text{si } i_0 = 1 \\ \lambda y_{i_0} = y_{i_0-1} + y_{i_0+1} & \text{si } i_0 \in \llbracket 2, q-1 \rrbracket \\ \lambda y_{i_0} = y_{q-1} & \text{si } i_0 = q \end{cases}.$$

Mais dans tous les cas on a toujours $|\lambda| \cdot |y_{i_0}| \leq 2|y_{i_0}|$. Or $Y \neq 0$, d'où $y_{i_0} \neq 0$ puis $|\lambda| \leq 2$. Or $\lambda \in \mathbb{R}$, et finalement

$$\lambda \in [-2, 2].$$

Par ailleurs $\frac{\lambda}{2} \in [-1, 1]$ et la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, donc comme espéré

$$\text{il existe } \theta \in [0, \pi] \text{ tel que } \frac{\lambda}{2} = \cos(\theta).$$

Q.31. Si on impose $y_0 = y_{q+1} = 0$, alors :

$$\lambda Y = BY \iff \begin{cases} \lambda y_1 = y_2 = y_0 + y_2 \\ \lambda y_2 = y_1 + y_3 \\ \vdots \\ \lambda y_{q-1} = y_{q-2} + y_q \\ \lambda y_q = y_{q-1} = y_{q-1} + y_{q+1} \end{cases} \iff \boxed{\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0}.$$

Q.32. La famille $(y_k)_{k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket}$ vérifie la relation de récurrence double $y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0$ d'équation caractéristique $r^2 - \lambda r + 1 = 0$, soit $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$, ou encore $(r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta}) = 0$. D'après les propriétés sur les suites

récurrentes, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$,
$$\begin{cases} y_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta} & \text{si } \theta \in]0, \pi[, \\ y_k = (\alpha + k\beta)e^{-k\theta} & \text{si } \theta \in \{0, \pi\}. \end{cases}$$

- Cas $\theta \in \{0, \pi\}$

Alors $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{q+1} = 0 \end{cases}$ mènerait à $\begin{cases} \alpha = 0 \\ (\alpha + (q+1)\beta)e^{i(q+1)\theta} = 0 \end{cases}$ puis à $\alpha = \beta = 0$, ce qui donnerait $y_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$, ce qui serait absurde car $Y \neq 0$.

- Cas $\theta \in]0, \pi[$

Les conditions $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{q+1} = 0 \end{cases}$ mènent à $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i(q+1)\theta} + \beta e^{-i(q+1)\theta} = 0 \end{cases}$. Les y_i n'étant pas tous nuls, il vient

$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc le système ci-dessus n'est pas un système de Cramer. En conséquence de quoi : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i(q+1)\theta} & e^{-i(q+1)\theta} \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $e^{-i(q+1)\theta} = e^{i(q+1)\theta}$, ou encore $\sin((q+1)\theta) = 0$, ce qui équivaut à : il existe $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ tel que $\theta = \frac{j\pi}{q+1}$.

Finalement

$$\text{il existe bien } j \in \llbracket 1, q \rrbracket \text{ tel que } \lambda = 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right).$$

Q.33. La **Q.32** nous donne seulement $\text{Sp}(B) \subset \left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}$.

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $\lambda_j = 2 \cos \frac{j\pi}{q+1}$. Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, alors d'après la **Q.32** on peut trouver

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_k = \alpha e^{k\theta} + \beta e^{-k\theta}$ pour tout $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$. Cette formule restant valable avec $y_0 = 0$, on a donc $\beta = -\alpha$.

Si on prend $\alpha = -\beta = 1$, alors $y_k = \sin \left(\frac{kj\pi}{q+1} \right)$ vérifie la relation de récurrence de la **Q.32** et d'après l'équivalence

établie à la **Q.31**, le vecteur $Y_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (non nul) de B associé à λ_j .

On a prouvé que tous les λ_j sont bien des valeurs propres :

$$\text{Sp}(B) = \left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}$$

Comme ces q valeurs propres sont distinctes deux à deux (puisque $\cos$ est bijective sur $]0, \pi[$) et que $\mathbb{R}^q$ est de dimension q , la famille $(Y_1, \dots, Y_q)$ est une base de $\mathbb{R}^q$:

$$\left(\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{q+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{q\pi}{q+1}) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sin(\frac{k\pi}{q+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{kq\pi}{q+1}) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sin(\frac{q\pi}{q+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{q^2\pi}{q+1}) \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathbb{R}^q \text{ formée de vecteurs propres de } B.$$

Q.34. D'après **Q.29**, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée quels que soient les choix de q et de F_0 si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset [-1, 1]$. Il nous faut donc déterminer $\text{Sp}(A)$.

Le principe de translation de spectre affirme que : si $\text{Sp}(M) = (m_1, \dots, m_n)$ alors $\text{Sp}(aM + bI_n) = (am_1 + b, \dots, am_n + b)$; en outre les vecteurs propres de M et $aM + bI_n$ sont les mêmes.

En ce qui nous concerne, et puisque $A = (1 - 2r)I_q + rB$, il vient d'après **Q.33** :

$$\text{Sp}(A) = \left\{ (1 - 2r) + 2r \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\} = \left\{ 1 - 2r \left(1 - \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}.$$

Par décroissance de cosinus sur $[0, \pi]$:

$$\max(\text{Sp}(A)) = 1 - 2r \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right) \right) \quad \text{et} \quad \min(\text{Sp}(A)) = 1 - 2r \left(1 - \cos \left(\frac{q\pi}{q+1} \right) \right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{Sp}(A) \subset [-1, 1] &\iff -1 \leq \min(\text{Sp}(A)) \leq \max(\text{Sp}(A)) \leq 1 \\
&\iff -1 \leq 1 - 2r \left(1 - \cos \left(\frac{q\pi}{q+1} \right) \right) \wedge 1 - 2r \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right) \right) \leq 1 \\
&\iff r \left(1 - \cos \left(\frac{q\pi}{q+1} \right) \right) \leq 1 \wedge \underbrace{-2r \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right) \right) \leq 0}_{\text{toujours vrai}} \\
&\iff r \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right) \right) \leq 1 \iff r \leq \frac{1}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right)} (*)
\end{aligned}$$

D'une part $\frac{1}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right)} \geq \frac{1}{2}$. D'autre part $\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{q+1} \right)} = \frac{1}{2}$.

Par conséquent l'inégalité (*) est satisfaite pour tout entier q si et seulement si $r \leq \frac{1}{2}$. Or $r = \frac{\tau}{\delta^2}$.

Finalement :

$$(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée quels que soient les choix de } q \text{ et de } F_0 \text{ si et seulement si } \frac{\tau}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Équation de diffusion et marche aléatoire

IV.A

Q.35. Puisque $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $Y_n = \frac{1}{2}(X_n + 1)$, il vient $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$: Y_n suit une loi de Bernoulli.

De plus $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$, donc

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B} \left(\frac{1}{2} \right).$$

Les variables aléatoires X_n étant mutuellement indépendantes, il en est de même pour les $Y_n = f(X_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + 1)$.

Par conséquent Z_n est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$Z_n \text{ suit une loi binomiale de paramètre } \left(n, \frac{1}{2} \right).$$

En particulier $\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$.

Q.36. Pour tout $\omega \in \Omega$, il vient $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n X_j(\omega)$ avec $X_j(\omega) \in \{-1, 1\}$. Subséquemment : $S_n(\omega)$ est pair si n est pair et impair si n est impair. Ainsi lorsque n et k n'ont pas la même parité, l'événement $(S_n = k)$ est impossible.

En conséquence de quoi

$$\text{si } n \text{ et } k \text{ ne sont pas de même parité, alors } \mathbb{P}(S_n = k) = 0.$$

Q.37. Soit n et k deux entiers de même parité. Simple calcul brutal :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n X_j = k\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n (2Y_j - 1) = k\right) = \mathbb{P}\left(2\sum_{j=1}^n Y_j = k + n\right) \\ &= \mathbb{P}(2Z_n = k + n) = \mathbb{P}\left(Z_n = \frac{k+n}{2}\right) \stackrel{\text{Q.35}}{=} \boxed{\binom{n}{\frac{k+n}{2}} \frac{1}{2^n}}.\end{aligned}$$

Q.38. Tout d'abord remarquons que $S_n = \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n 2Y_j - 1 = 2Z_n - n$. Ensuite, utilisons $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$:

$$\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \mathbb{V}(S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \mathbb{V}(2Z_{\lfloor 1/\tau \rfloor} - n) = 4\delta^2 \mathbb{V}(Z_{\lfloor 1/\tau \rfloor}).$$

Or si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$, d'où d'après **Q.35** : $\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = 4\delta^2 \times \lfloor 1/\tau \rfloor \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor}.$$

Q.39. Résultat classique de Sup :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x}.$$

En effet pour $x > 0$ il vient $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ d'où $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$; le théorème d'encadrement achève la démonstration.

Dans notre cas avec $x = \frac{1}{\tau}$, il vient $\lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\tau}$ d'où

$$\boxed{\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\delta^2}{\tau}}.$$

Q.40. Le couple $([X_{n+1} = -1], [X_{n+1} = 1])$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1}(k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k | X_{n+1} = 1) \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k | X_{n+1} = -1) \mathbb{P}(X_{n+1} = -1).$$

Tout d'abord $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = -1) = \frac{1}{2}$. Ensuite

$$[S_{n+1} = k] \cap [X_{n+1} = 1] = \left[\sum_{j=1}^{n+1} X_j = k \right] \cap [X_{n+1} = 1] = \left[\sum_{j=1}^n X_j = k - 1 \right] = [S_n = k - 1]$$

et de même $[S_{n+1} = k] \cap [X_{n+1} = -1] = [S_n = k + 1]$. En conséquence de quoi :

$$p_{n+1}(k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_n = k + 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_n = k - 1) = \frac{\delta^2}{2} \times \frac{p_n(k + 1) + p_n(k - 1)}{\delta^2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau}} &= \frac{p_{n+1}(k)}{\tau} - \frac{p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \times \frac{p_n(k + 1) + p_n(k - 1)}{\delta^2} - \frac{\delta^2}{2\tau} \times \frac{p_n(k)}{\delta^2} \\ &= \boxed{\frac{\delta^2}{2\tau} \times \frac{p_n(k + 1) - 2p_n(k) + p_n(k - 1)}{\delta^2}}.\end{aligned}$$

Q.41. D'après la question **Q.40**, les probabilités $p_n(k) = \mathbb{P}(S_n = k)$ vérifient

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k + 1) - 2p_n(k) + p_n(k - 1)}{\delta^2}.$$

Cette relation est exactement de la forme du schéma numérique étudié en partie III, avec

$$r = \frac{\tau}{\delta^2}.$$

La condition de stabilité obtenue en partie III est

$$r \leq \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad \frac{\delta^2}{\tau} \geq 2.$$

Or, d'après la question **Q.39**,

$$\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) \sim \frac{\delta^2}{\tau} \quad \text{quand } \tau \rightarrow 0.$$

Ainsi, la stabilité du schéma équivaut à exiger que la variance du déplacement par unité de temps reste bornée (et en particulier finie dans le cas critique $\delta^2 = 2\tau$).

On en déduit que la condition de stabilité possède une interprétation probabiliste : elle exprime que la marche aléatoire, correctement mise à l'échelle, admet une limite diffusive cohérente, c'est-à-dire un comportement de type brownien.

Fin du sujet 2

