

Corrigé du Concours Blanc avec le rapport du Jury

Analyse globale des résultats

La problématique du sujet est au cœur des préoccupations de la classe de PC et l'approche par différents thèmes (transformée de Fourier, discrétisation, marche aléatoire) devait permettre aux candidats de réinvestir les résultats du cours et de construire des raisonnements. Le premier constat concerne une accentuation de l'hétérogénéité des niveaux, et un fort étalement des notes. On trouve de nombreuses très bonnes copies de candidats qui ont bien compris ce que l'on attend d'eux, à savoir une argumentation serrée, une mise en œuvre des schémas de raisonnements standards, une rédaction soignée, et surtout qui ont bien compris les notions sous-jacentes. À l'opposé on trouve un trop grand nombre de candidats de très faible niveau avec de très grosses lacunes et un manque de savoir-faire sur les techniques fondamentales des mathématiques. Pour ces candidats le travail fourni dans la discipline est très insuffisant.

La notion d'intégrabilité est mal comprise par au moins un quart des candidats, ce qui sur ce sujet est souvent rédhibitoire. Par ailleurs, bien que les hypothèses des grands théorèmes d'intégration soient connues, leur mise en place est souvent hasardeuse. Comprendre ce que signifie le mot « intégrable », utiliser les grands théorèmes — convergence dominée, dérivation sous le signe intégrale, intégration terme à terme — cela constitue l'un des objectifs fondamentaux du programme de PC et à ce titre ce sujet constitue un recueil de ces savoir-faire. Notons également, mais ce n'est pas nouveau, que la gestion des nombres complexes pose de gros problèmes, notamment la notion de module. Concernant les compétences en calcul, encore une fois les niveaux sont hétérogènes, mais l'impression générale qui se dégage est plutôt satisfaisante.

Dans ce sujet il fallait plusieurs fois vérifier un résultat donné dans le texte : il faut mettre en garde les candidats sur le fait que dans ce cas, une réponse non argumentée, voire mensongère, entraîne évidemment une pénalisation qui peut être effective, ou se traduire par un doute systématique sur la suite de la copie. Concernant la capacité à rédiger une solution rigoureuse, on constate que de nombreux candidats ont bien compris qu'il fallait argumenter sérieusement, mais il s'agit bien entendu d'utiliser des arguments convaincants, et à cet égard certaines questions sont révélatrices du niveau de rigueur des candidats.

Ainsi, les candidats trop pressés d'avancer finissent par le payer assez cher en perdant un point ou deux sur chaque question souvent pour des arguments qu'ils connaissent mais oublient de citer, et tout cela cumulé peut faire un quart de la note finale. De plus, des points de bonus ont été accordés aux candidats faisant preuve de soin et de rigueur dans la rédaction des questions délicates.

I Préliminaires

IA – Quelques propriétés de g_σ

Q1. La fonction $g_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$ (qui est symétrique par rapport à 0).

De plus, par croissances comparées, on a, en posant $X = \frac{x^2}{2\sigma^2}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 g_\sigma(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0.$$

Donc $g_\sigma(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, la fonction g_σ est intégrable en $+\infty$ par comparaison. Par parité, elle l'est aussi en $-\infty$.

Finalement :

g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q1. Cette question a donné lieu à des réponses surprenantes concernant la notion d'intégrabilité. On rencontre plus souvent que les années précédentes des erreurs graves : si la fonction converge vers 0 en $+\infty$, ou y admet une limite finie, alors l'intégrale est « faussement impropre en $+\infty$ » ; une fonction bornée comme par exemple $x \mapsto \exp(ix)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.... La continuité de la fonction g_σ est souvent omise ou seulement citée sur l'intervalle $[-1, 1]$; la comparaison à la fonction $x \mapsto 1/x^2$ nécessite d'indiquer que cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ (et non sur $\mathbb{R}$ comme on le voit parfois). Attention la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ ne fait pas partie des fonctions intégrables de référence du programme et être « du type $\exp(-x^n)$ » n'est évidemment pas un argument recevable !

Q2. Avec le changement de variable $t = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Soit avec $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx = 1$$

Q2. L'oubli de justification de l'éligibilité pour le changement de variable dans l'intégrale généralisée est pénalisé. Il ne faut évidemment pas se contenter de poser $u^2 = x^2/(2\sigma^2)$, ce qui à priori n'a pas de sens.

Q3. La fonction g_σ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^∞ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_\sigma'(x) = -\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

On a $g_\sigma' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_\sigma' < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$, donc :

g_σ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

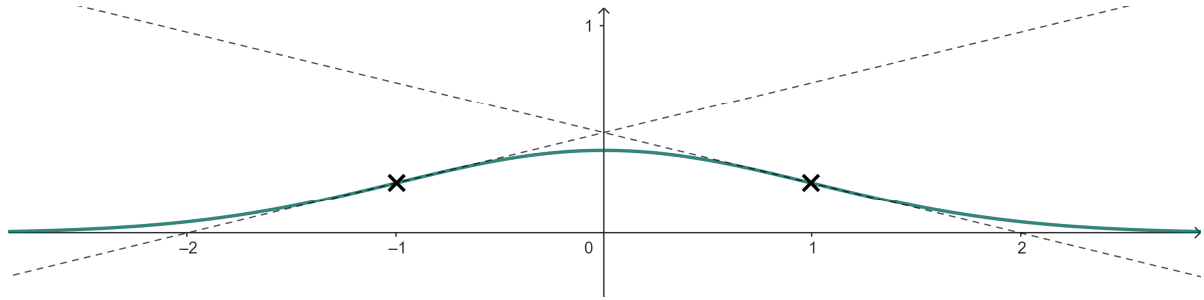
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_\sigma''(x) = \frac{x^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (x^2 - \sigma^2).$$

Donc, g_σ'' s'annule en changeant de signe en même temps que $x^2 - \sigma^2$, soit (avec $\sigma \neq 0$) :

g_σ'' s'annule en changeant de signe en exactement deux points : $-\sigma$ et σ .

On obtient la courbe (représentée ici pour $\sigma = 1$) :



Q3. Il faut justifier que la fonction g_σ est bien de classe C^2 avant de se lancer dans les calculs.

I.B –

Q4. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)e^{-i2\pi\xi x}| = |f(x)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$, autrement dit $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, donc :

$$x \mapsto f(x)e^{-i2\pi\xi x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q4. On voit parfois qu'une fonction bornée, comme par exemple $x \mapsto \exp(-i2\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puis que le produit de deux fonctions intégrables est intégrable ; on voit également que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-i2\pi\xi x) = 0$ (voir les remarques générales sur la mauvaise compréhension de la notion d'intégrabilité et la gestion des nombres complexes). Le fait que la fonction f soit à valeurs complexes a posé des soucis pour la domination de $f(x) \exp(-i2\pi\xi x)$: beaucoup de candidats reviennent à la partie réelle et la partie imaginaire, sans doute par peur d'utiliser le module, ce qui alourdit le raisonnement.

Q5. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)e^{-i2\pi\xi x}$ est continue (car f l'est), donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto f(x)e^{-i2\pi\xi x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car proportionnelle à une fonction exponentielle.
- Pour tout $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x)e^{-i2\pi\xi x}| = |f(x)|$ et $x \mapsto |f(x)|$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$).

Ainsi :

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x} dx \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Q5. Question plutôt bien traitée, on voit apparaître soudainement des quantificateurs dans cette question, de la rigueur le temps d'une question : on déclare les variables et on parle de $x \mapsto f(x)$, mais le contraste est assez troublant avec ce qui précède où l'on parle souvent de « la fonction $f(x)$ ». La notion de fonction mérite qu'on s'y attarde et que l'on prenne le temps d'en saisir le sens.

I.C –

Q6. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x) dx$.

Comme f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} f'(x) dx$ converge, donc f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$.

Si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = |\ell| > 0$ et il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \geq x_0$:

$$-\frac{1}{2}|\ell| \leq |f(x)| - |\ell| \leq \frac{1}{2}|\ell| \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\ell| \leq |f(x)| \leq \frac{3}{2}|\ell|.$$

Alors, pour tout réel $x \geq x_0$:

$$\int_{x_0}^x |f(x)| dx \geq \int_{x_0}^x \frac{1}{2}|\ell| dx = \frac{1}{2}|\ell|(x - x_0).$$

Et par comparaison avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}|\ell|(x - x_0) = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x |f(x)| dx = +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f en $+\infty$. Ainsi, $\ell = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Comme f et f' sont intégrables en $-\infty$, la fonction $x \mapsto f(-x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, intégrable $+\infty$, de dérivée $x \mapsto -f'(-x)$, intégrable $+\infty$. On peut donc appliquer le résultat précédent à cette fonction et conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Finalement, on a bien :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Q6. Cette question n'a été abordée que par un candidat sur deux et très peu réussie. Elle nécessitait, et c'est un des objectifs de cette épreuve, de produire un enchaînement d'arguments simples en commençant par l'intégrabilité de f' . Cependant, la plupart des candidats pensent que l'existence d'une limite nulle en $+\infty$ est une condition nécessaire d'intégrabilité, ce qui clôt le débat (la confusion avec la condition nécessaire de convergence pour les séries est très fréquente). Les candidats qui ont franchi cette difficulté ont été largement récompensés.

Q7. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Comme f et f' sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\xi)$ et $\mathcal{F}(f')(\xi)$ existent.

Soient $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq B$. Par intégration par parties, on a :

$$\int_A^B f'(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = \left[f(x) e^{-i2\pi\xi x} \right]_A^B + i2\pi\xi \int_A^B f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $x \mapsto e^{-i2\pi\xi x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (de module 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$),

on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} = 0$, donc en faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = i2\pi\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx.$$

Soit :

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i2\pi\xi \mathcal{F}(f)(\xi)$$

Q7. L'utilisation d'une intégration par parties nécessite de préciser que les fonctions concernées sont de classe C^1 . Certains candidats ont essayé sans succès de dériver sous le signe intégral, mais ici x n'est pas un paramètre : c'est une confusion entre $F(f')$ et $(F(f))'$.

I.D –**Q8.** Soit $p \in \mathbb{N}$.

La fonction $x \mapsto x^{2p} e^{-x^2}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$ (qui est symétrique par rapport à 0).

De plus, par croissances comparées, on a en posant $X = x^2$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} e^{-x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^{p+1} e^{-X} = 0.$$

Donc $x^{2p} e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$, $x \mapsto x^{2p} e^{-x^2}$ est intégrable en $+\infty$ par comparaison. Par parité, elle l'est aussi en $-\infty$.

Finalement :

$$x \mapsto x^{2p} e^{-x^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q8. On retrouve les mêmes erreurs qu'à la question 1, avec parfois une primitive de $\exp(-x^2)$ égale à $-\exp(-x^2)/(2x)$. Beaucoup trop de candidats ne sont réellement pas à l'aise avec la notion d'intégrabilité : une question « évidente » qui se traite en une ligne peut donner lieu à des solutions extrêmement compliquées et confuses. Certains ont prouvé ce résultat par récurrence et ainsi obtenu la relation de la question 9, mais que de complications pour si peu !

Q9. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A \leq B$, on a avec une intégration par parties :

$$\int_A^B x^{2(p+1)} e^{-x^2} dx = \int_A^B x^{2p+1} (x e^{-x^2}) dx = \left[x^{2p+1} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \right]_A^B - \int_A^B (2p+1) x^{2p} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) dx.$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2p+1} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p+1} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) = 0$, donc en passant à la limite quand A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2(p+1)} e^{-x^2} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} (2p+1) x^{2p} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) dx = \frac{1}{2} (2p+1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-x^2} dx.$$

Soit, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M_{p+1} = \frac{1}{2} (2p+1) M_p$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^{2(p+1)} (p+1)!}{\sqrt{\pi} (2(p+1))!} M_{p+1} = \frac{2^{2p} p!}{\sqrt{\pi} (2p)!} \frac{4(p+1)}{(2p+1)(2p+2)} \frac{1}{2} (2p+1) M_p = \frac{2^{2p} p!}{\sqrt{\pi} (2p)!} M_p.$$

La suite $\left(\frac{2^{2p} p!}{\sqrt{\pi} (2p)!} M_p \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc constante. Avec le résultat admis dans la question **Q2**, on obtient

alors pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2^{2p} p!}{\sqrt{\pi} (2p)!} M_p = \frac{2^0 0!}{\sqrt{\pi} 0!} M_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Et ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi} (2p)!}{2^{2p} p!}$$

Q9. Question plutôt bien réussie par la majorité des candidats pour ce qui concerne la relation de récurrence. Mais une fois obtenue la relation liant M_{p+1} et M_p , la formule de M_p étant donnée dans le texte, il fallait argumenter (pas nécessairement par une récurrence) et non justifier par un : « on en déduit de façon évidente que ».

Q10. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Avec le développement en série entière de la fonction cosinus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (2\pi\xi x)^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (2\pi\xi)^{2p} x^{2p}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) e^{-x^2} x^{2p} \text{ avec pour tout } p \in \mathbb{N}, c_p(\xi) = \frac{(-1)^p}{(2p)!} (2\pi\xi)^{2p}.$$

Q10. Il fallait bien entendu préciser le rayon de convergence de la série entière de la fonction cosinus.

Q11. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_p(x) = c_p(\xi) e^{-x^2} x^{2p}$.

- D'après **Q8**, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- D'après **Q10**, la série $\sum f_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x)$, qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- D'après **Q9**, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!} e^{-x^2} x^{2p} dx = \frac{(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!} M_p = \frac{(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!} \frac{\sqrt{\pi} (2p)!}{2^{2p} p!} = \sqrt{\pi} \frac{(\pi^2 \xi^2)^p}{p!}.$$

Comme la série exponentielle $\sum \frac{(\pi^2 \xi^2)^p}{p!}$ converge, la série $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)| dx$ converge.

Alors, $x \mapsto e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x) dx &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c_p(\xi) e^{-x^2} x^{2p} dx = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) M_p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (2\pi\xi)^{2p} \frac{\sqrt{\pi} (2p)!}{2^{2p} p!} = \sqrt{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-\pi^2 \xi^2)^p}{p!} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a vu dans la question **Q4** que si f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto f(x) e^{-i2\pi\xi x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or, $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (**Q2**), donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2} e^{-i2\pi\xi x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i2\pi\xi x} dx$ converge.

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i2\pi\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} [\cos(2\pi\xi x) - i\sin(2\pi\xi x)] dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x) dx$ converge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x) dx$ converge.

Mais la fonction $x \mapsto e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x) dx = 0$ et ainsi, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i2\pi\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2\pi\xi x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\pi\xi x) dx.$$

Soit finalement, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i2\pi\xi x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}$$

Q11. Peu de candidats ont vu que l'intégrale de la partie imaginaire était nulle. La plupart des candidats voient qu'il s'agit d'une intégration terme à terme mais rédigent très mal : on omet de signaler la convergence de la série des intégrales des modules, ou on laisse apparaître un $(-1)^p$ dans cette série. On parle de temps en temps de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en lien avec le rayon de convergence infini de la série entière ! Encore une fois le résultat étant donné, il était assez simple en remontant les calculs à l'envers de le produire. C'est bien ici la rédaction rigoureuse de la justification de l'intégration qui était attendue.

Q12. La fonction $g_\sigma : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (question **Q1**), donc $\mathcal{F}(g_\sigma)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ (et même continue : question **Q5**). Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\pi\xi x} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i2\pi\xi x} dx$$

Avec le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$, on obtient :

$$\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-i2\pi\xi\sqrt{2}\sigma u} \sqrt{2}\sigma du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-i2\pi(\sqrt{2}\sigma\xi)u} du.$$

Avec le résultat de la question précédente (qui était valable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, donc valable aussi en remplaçant ξ par $\sqrt{2}\sigma\xi$), on obtient :

$$\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 (\sqrt{2}\sigma\xi)^2} = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2}.$$

Or, avec $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$g_{\sigma'}(\xi) = \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma'^2}} = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2}.$$

Ainsi :

$$\mathcal{F}(g_\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\sigma'}$$

Q12. Les candidats qui ont déterminé et retenu la valeur de μ ont pu l'exploiter à la question 20.

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Q13. Posons *ici* : $f : (t, x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

La fonction $(t, x) \mapsto \sqrt{\sigma^2+2t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, comme composée de $(t, x) \mapsto \sigma^2+2t$ qui est C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (car polynômiale) et strictement positive, par la fonction racine carrée qui est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $(t, x) \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\right)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, comme composée de

$(t, x) \mapsto -\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}$ qui est C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (car rationnelle) par la fonction exponentielle qui est C^2 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, comme produit de telles fonctions.

Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2}{2(\sigma^2+2t)\sqrt{\sigma^2+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}} \frac{2x^2}{2(\sigma^2+2t)^2} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2}{(\sigma^2+2t)^2} - \frac{1}{\sigma^2+2t} \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}} \frac{x}{\sigma^2+2t} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}} \left(\frac{x}{\sigma^2+2t} \frac{x}{(\sigma^2+2t)} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} - \frac{1}{\sigma^2+2t} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2}{(\sigma^2+2t)^2} - \frac{1}{\sigma^2+2t} \right) \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$ pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\sigma^2+2t} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}} = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = g_\sigma(x).$$

Finalement :

La fonction	$\left \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) \end{array} \right.$	vérifie bien les conditions i et iii.
-------------	---	---------------------------------------

Q13. Certains candidats, peu nombreux, pensent à exploiter le résultat de la question 4 pour calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$. Il ne faut pas attendre du correcteur qu'il fasse lui-même les simplifications de constantes pour vérifier l'égalité car en effet les réponses non simplifiées ont été légion. Certains concluent même qu'il y a égalité alors que ce n'est pas le cas à l'issue de leurs calculs.

II.A –

Q14. Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $T = t + 1 \in \mathbb{R}_+^*$ (donc $t \in]0, T[$).

La fonction $x \mapsto f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}| = |f(t, x)| \leq \phi_T(x).$$

Comme ϕ_T est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, par comparaison :

$$x \mapsto f(t, x)e^{-i2\pi\xi x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.$$

Q14. La domination sur l'intervalle ouvert $]0, T[$ nécessitait de choisir T en fonction de t , ce qui est peu souvent envisagé (un candidat sur 10 a soulevé ce problème).

Q15. Pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\hat{f}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x)e^{-i2\pi\xi x} dx$ et $\widehat{g_\sigma}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)e^{-i2\pi\xi x} dx$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(t, x)e^{-i2\pi\xi x} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} g_\sigma(x)e^{-i2\pi\xi x}$ (car $f(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} g_\sigma(x)$ par hypothèse).
- Pour tout $t \in]0, 1[$, $x \mapsto f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}$ et $x \mapsto g_\sigma(x)e^{-i2\pi\xi x}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par hypothèse et g_σ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après **Q3**).
- Pour tout $(t, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$, $|f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}| = |f(t, x)| \leq \phi_1(x)$ et ϕ_1 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, $x \mapsto f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}$ et $x \mapsto g_\sigma(x)e^{-i2\pi\xi x}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (on le savait déjà) et :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x)e^{-i2\pi\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x)e^{-i2\pi\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)e^{-i2\pi\xi x} dx.$$

Autrement dit, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$$

Q15. Dans cette question utilisant la convergence dominée et la définition séquentielle de la limite, de nombreux candidats ont fourni une solution soignée, mais la majorité des copies produit un raisonnement confus où surnage parfois la convergence dominée mais sans que les objets concernés soient clairement définis. Il fallait aussi choisir T en fonction de la suite (t_n) , ce que très peu de candidats ont vu.

Q16. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après **Q14**).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)e^{-i2\pi\xi x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions (par hypothèse sur f entre autres).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)e^{-i2\pi\xi x}$ est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (par hypothèse sur f entre autres).

- Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq \chi_T(x)$ et χ_T est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (par hypothèse sur f).

Alors, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in]0, T[$ et la fonction $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx$ est de classe C^1 sur $]0, T[$, de dérivée $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx$. Ceci étant vrai pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, les résultats restent vrais sur $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{T \in \mathbb{R}_+^*}]0, T[$ et ainsi, $t \mapsto \hat{f}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx$ est de classe C^1 en sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx$.

Ainsi, pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx$$

Q16. Question abordée plus souvent que la question précédente. La démarche demandée étant proche du cours, les hypothèses du théorème de Leibniz sont souvent bien citées. Même problème pour le choix de T , avec ici une domination de $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ grâce à l'équation de diffusion.

Q17. Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme f vérifie l'hypothèse i, la relation ci-dessus se réécrit :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx.$$

D'après la question **Q7**, si $x \mapsto h(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que h et h' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h'(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = i2\pi\xi \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi\xi x} dx.$$

Par hypothèse, $x \mapsto f(t, x)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (car f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$) et $x \mapsto f(t, x)$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$ sont toutes trois intégrables sur $\mathbb{R}$, par comparaison à ϕ_{t+1} , χ_{t+1} et ψ_{t+1} respectivement, on peut appliquer le résultat de la question **Q7** une première fois à $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$, puis une seconde fois à $x \mapsto f(t, x)$, ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx = i2\pi\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx = i2\pi\xi \left(i2\pi\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx \right)$$

Soit avec le résultat de la question précédente :

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = (i2\pi\xi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) e^{-i2\pi\xi x} dx$$

Et donc, pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(t, \xi)$$

Q17. Les candidats ayant utilisé l'équation de diffusion à la question précédente ont le plus souvent pensé à faire apparaître la dérivée seconde spatiale, mais les justifications ne sont pas toujours très claires !

II.B –

Q18. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé.

D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto \hat{f}(t, \xi)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y' + 4\pi^2 \xi^2 y = 0$. Il existe donc un nombre $K(\xi)$, indépendant de t , mais dépendant a priori de ξ (qui est un paramètre ici) tel que pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\hat{f}(t, \xi) = K(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$$

Q18. Un minimum de justifications était demandé : équation différentielle linéaire, quelle est la variable de cette fonction ? À noter que la constante $K(\xi)$ est a priori complexe.

Q19. D'après la question **Q15**, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$. Or, avec la formule précédente, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = K(\xi)$, donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$K(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$$

Q19. Question facile, réussie par tous les candidats qui l'ont abordée.

II.C –

Q20-Q21. Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après les deux questions précédentes, on a $\hat{f}(t, \xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ et d'après la question **Q12** :

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2}.$$

Donc :

$$\hat{f}(t, \xi) = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2} e^{-4\pi^2 \xi^2 t} = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2 - 4\pi^2 \xi^2 t}.$$

Soit :

$$\hat{f}(t, \xi) = e^{-2\pi^2 (\sigma^2 + 2t) \xi^2} \text{ et } v_\sigma = 1$$

Q20. Question de synthèse et de calcul, que les candidats qui avaient obtenu la valeur de μ à la question 12 ont abordé avec plus de facilité.

Q21. Rarement traitée correctement. Beaucoup de candidats ont ici déserté la partie II pour se consacrer aux parties suivantes.

Q22. Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question **Q12**, on a :

$$\widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t}} g_{\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = e^{-2\pi^2(\sigma^2+2t)\xi^2}$$

Donc, d'après la question précédente, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{F}(f(t, \cdot)) = \hat{f}(t, \cdot) = \widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}} = \mathcal{F}(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}).$$

Or, on a vu que $g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$ et $f(t, \cdot)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (les transformées de Fourier existent !). Alors, d'après le résultat admis, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(t, \cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$$

Et $\lambda_t = 1$.

Q22. Seuls 20 % des candidats abordent cette fin de la partie II, les réponses sont souvent confuses, la linéarité de la transformation de Fourier est parfois citée. Encore une fois ceux qui ont trouvé $\mu = \sigma' \sqrt{2\pi}$ ont obtenu directement $\lambda_{t,\sigma} = 1$.

Q23. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = \hat{f}(t, 0)$ et I est dérivable de dérivée $I' : t \mapsto \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, 0)$.

Or, d'après la question **Q17**, on a $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(t, \xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et en particulier pour

$\xi = 0$, on obtient $I'(t) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, 0) = 0$. Ainsi, I' est nulle, donc :

I est constante.

Q23. Question plus facile mais peu abordée.

Q24. Le résultat a été établi dans la question **Q22**.

Q24. Résultat obtenu le plus souvent par les candidats ayant calculé la valeur de μ .

III Étude numérique

III.A –

Q25. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]0, 1[$.

Comme la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, l'application partielle $f_x : t \mapsto f(t, x)$ est (entre autres) dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(t+\theta, x) - f(t, x)}{\theta} = f'_x(t).$$

Soit :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(t+\theta, x) - f(t, x)}{\theta} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$$

Q25. Bien traitée dans l'ensemble (ne pas oublier de préciser que f est de classe C^1). Les mauvaises réponses évoquent la dérivée $f'(t, x)$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial t}(0, x)$.

Q26. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]0, 1[$.

Comme la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, l'application partielle $f_t : x \mapsto f(t, x)$ est de classe C^2 sur $]0, 1[$. On peut donc appliquer (deux fois) la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (avec $h \in \mathbb{R}^*$ assez petit, pour que $x-h \in]0, 1[$ et $x+h \in]0, 1[$) :

$$\begin{aligned} f(t, x-h) &= f_t(x-h) = f_t(x) - f'_t(x)h + \frac{1}{2} f''_t(x)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ f(t, x+h) &= f_t(x+h) = f_t(x) + f'_t(x)h + \frac{1}{2} f''_t(x)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= f(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \end{aligned}$$

En additionnant les deux relations et en divisant par $h^2 \neq 0$, on obtient :

$$f(t, x-h) + f(t, x+h) = 2f(t, x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

Soit :

$$f(t, x-h) + f(t, x+h) - 2f(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

Et en divisant par $h^2 \neq 0$, on obtient :

$$\frac{f(t, x-h) + f(t, x+h) - 2f(t, x)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + o_{h \rightarrow 0}(1).$$

Et donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t, x-h) + f(t, x+h) - 2f(t, x)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$$

Q26. Les candidats qui n'ont pas pensé au développement de Taylor ont tenté, bien entendu sans succès, de conclure par un empilement de taux d'accroissement. Les développements de Taylor sont le plus souvent corrects bien que mal justifiés (C^2).

III.B –

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$\frac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\tau} = \frac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(k) = \frac{\tau}{\delta^2} f_n(k-1) + \left(1 - 2\frac{\tau}{\delta^2}\right) f_n(k) + \frac{\tau}{\delta^2} f_n(k+1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \begin{pmatrix} f_{n+1}(1) \\ \vdots \\ f_{n+1}(k) \\ \vdots \\ f_{n+1}(q) \end{pmatrix} = \frac{\tau}{\delta^2} \begin{pmatrix} f_n(0) \\ \vdots \\ f_n(k-1) \\ \vdots \\ f_n(q-1) \end{pmatrix} + \left(1 - 2\frac{\tau}{\delta^2}\right) \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(k) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} + \frac{\tau}{\delta^2} \begin{pmatrix} f_n(2) \\ \vdots \\ f_n(k+1) \\ \vdots \\ f_n(q+1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\tau}{\delta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_n(k-1) \\ \vdots \\ f_n(q-1) \end{pmatrix} + \left(1 - 2\frac{\tau}{\delta^2}\right) \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(k) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} + \frac{\tau}{\delta^2} \begin{pmatrix} f_n(2) \\ \vdots \\ f_n(k+1) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\tau}{\delta^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(k) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} + \left(1 - 2\frac{\tau}{\delta^2}\right) \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(k) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} + \frac{\tau}{\delta^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(k) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$F_{n+1} = \left[\frac{\tau}{\delta^2} B + \left(1 - 2\frac{\tau}{\delta^2}\right) I_q \right] F_n.$$

Et avec $r = \frac{\tau}{\delta^2}$ et $A = rB + (1 - 2r)I_q$, on obtient bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = AF_n$$

Q27. Question plutôt bien réussie, mais les cas particuliers aux bords sont rarement évoqués. Il y a de nombreuses tentatives de démonstration par récurrence : ces candidats concluent qu'ils ont démontré le résultat par récurrence alors qu'en pratique ce n'est pas le cas.

Q28. Les matrices A et B sont symétriques réelles (A l'est car c'est une combinaison linéaire de deux matrices symétriques réelles B et I_q), donc :

A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = A^n F_0$.

- Au rang $n = 0$, $A^0 F_0 = I_q F_0 = F_0$, donc la relation est vérifiée.
- Supposons la relation vérifiée à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors $F_{n+1} = A F_n = A A^n F_0 = A^{n+1} F_0$ et la relation est vérifiée au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$F_n = A^n F_0$$

Q28. Question plutôt bien réussie, mais de nombreux candidats qui ont reconnu une matrice A symétrique ont omis de dire qu'elle est à coefficients réels, ils n'ont donc pas répondu à la question. Attention, la somme de deux matrices diagonalisables ne l'est pas forcément ! Surprenante erreur d'accord de l'adjectif, on évoque assez souvent le « théorème spectrale ». À noter qu'il est inutile de diagonaliser A pour prouver que $F_n = A^n F_0$.

Q29. Remarquons que comme $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si elle l'est pour la norme infinie, qui est équivalente à toutes les autres normes de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est alors bornée si et seulement si les q suites de coordonnées des X_n le sont.

Comme $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$ et $P \in GL_q(\mathbb{R})$ tels que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_q$ et $A = P D P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = A^n F_0 = (P D P^{-1})^n F_0 = P D^n P^{-1} F_0.$$

Donc, $P^{-1} F_n = D^n (P^{-1} F_0)$. Les coordonnées de $P^{-1} F_n$ sont des combinaisons linéaires des coordonnées de F_n (dont les coefficients ne dépendent pas de n), donc la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(P^{-1} F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est. Or, en notant $[X]_k$ la $k^{\text{ième}}$ coordonnée d'un vecteur X de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$[P^{-1} F_n]_k = \lambda_k^n [P^{-1} F_0]_k.$$

La suite $([P^{-1} F_n]_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison λ_k et une suite géométrique est bornée si et seulement si sa raison est comprise entre -1 et 1 (au sens large).

Finalement, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si toutes les suites $([P^{-1} F_n]_k)_{n \in \mathbb{N}}$ le sont, autrement dit, si et seulement si $\lambda_k \in [-1, 1]$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et comme les λ_k sont les valeurs propres de A :

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (quel que soit le choix de F_0) si et seulement si $Sp(A) \subset [-1, 1]$.

Q29. Cette question a été considérée comme simple par la plupart des candidats qui l'ont abordée (50 %) : la matrice A est diagonalisable, donc $A^n = P^{-1} D^n P$ où D^n est la matrice diagonale des valeurs propres élevées à la puissance n , laquelle matrice D^n est bornée si et seulement si toutes les valeurs propres de A appartiennent à $[-1, 1]$, et de plus A^n est bornée si et seulement si D^n l'est ; il ne reste plus qu'à multiplier par la constante F_0 pour conclure. Encore faut-il expliciter la norme matricielle utilisée dans ce raisonnement, et ces conditions sont-elles réellement nécessaires et suffisantes ? Autant de points qui n'ont été abordés que par très peu de candidats.

Q30. On pose $|y_m| = \max_{k \in \llbracket 1, q \rrbracket} |y_k|$. Comme Y est un vecteur propre, il est non nul, donc $|y_m| > 0$ (car si $|y_m| = 0$, tous les $|y_k|$ sont nuls aussi).

On a :

$$BY = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} + y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{pmatrix} = \lambda Y = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_k \\ \vdots \\ \lambda y_q \end{pmatrix}.$$

En posant $y_0 = y_{q+1} = 0$, on a $y_{k-1} + y_{k+1} = \lambda y_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et en particulier, pour $k = m$, on a :

$$|\lambda y_m| = |\lambda| |y_m| = |y_{m-1} + y_{m+1}| \leq |y_{m-1}| + |y_{m+1}| \leq 2|y_m|.$$

En divisant l'inégalité $|\lambda| |y_m| \leq 2|y_m|$ par $|y_m| > 0$, on n'en change pas le sens, ce qui donne $|\lambda| \leq 2$, soit :

$$\lambda \in [-2, 2]$$

On a alors $-1 \leq \frac{\lambda}{2} \leq 1$, donc il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\frac{\lambda}{2} = \cos \theta$ et ainsi :

$$\text{Il existe un unique réel } \theta \in [0, \pi] \text{ tel que } \lambda = 2 \cos \theta.$$

Q30. Raisonnement classique de majoration pour la norme sup, assez souvent bien traité. Attention, il ne suffit pas de dire que si $\theta \in [0, \pi]$, $-2 \leq 2 \cos \theta \leq 2$ pour en déduire l'existence de θ vérifiant $2 \cos \theta = \lambda$, c'est un point bêtement perdu.

Q31. On vient d'établir le résultat demandé dans la question précédente :

$$\text{Pour tout } k \in \llbracket 1, q \rrbracket, y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0.$$

Q31. Question facile qui aurait pu figurer avant la question 30 et l'aurait sans doute simplifiée. Elle servait de tremplin pour la question suivante.

Q32. La suite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket}$ vérifie une relation de récurrence linéaire double à coefficients constants :

$$y_{k-1} - 2 \cos \theta y_k + y_{k+1} = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$, soit :

$$r^2 - 2 \cos \theta r + \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - 1 \Leftrightarrow (r - \cos \theta)^2 = -\sin^2 \theta.$$

Les solutions complexes sont $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et $\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$, donc pour tout $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$:

$$y_k = A e^{ik\theta} + B e^{-ik\theta}$$

avec $A, B \in \mathbb{C}$. Or, $y_0 = y_{q+1} = 0$, donc :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{i(q+1)\theta} + B e^{-i(q+1)\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2i A \sin((q+1)\theta) = 0 \\ B = -A \end{cases}$$

Or, Y n'est pas nul, donc au moins un y_k non nul, soit $(A, B) \neq (0, 0)$. Ceci impose $\sin((q+1)\theta) = 0$, soit $\theta = \frac{j\pi}{q+1}$ avec $0 \leq j \leq q+1$ car $0 \leq \theta \leq \pi$. Enfin :

- si $j=0$, $\theta=0$ et $y_k = Ae^{ik\theta} + Be^{-ik\theta} = A+B=0$ pour tout $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$;
- si $j=q+1$, $\theta=\pi$ et $y_k = Ae^{ik\theta} + Be^{-ik\theta} = -(A+B)=0$ pour tout $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$.

Ces deux cas sont exclus car Y n'est pas nul et finalement :

$$\text{Il existe } j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \theta = \frac{j\pi}{q+1} \text{ et } \lambda = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right).$$

Q32. Cette question, un classique de l'algèbre linéaire, a été abordée par 10 % des candidats avec un très faible taux de réussite. Cela s'explique par le fait qu'elle arrivait loin dans le sujet au moment où les candidats avaient donné déjà beaucoup et se rendaient compte qu'ils partaient dans un marathon de calcul. Toutes les difficultés s'empilent ici, résolution d'une équation à solutions complexes, formules d'Euler et de Moivre, résolution d'équations trigonométriques...

Q33. D'après ce que l'on vient de voir, $Sp(B) \subset \left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right), j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}$.

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Si $2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right)$ est valeur propre de B et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, alors

d'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $y_k = A(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) = 2iA \sin(k\theta)$ avec $\theta = \frac{j\pi}{q+1}$ et

$$A \in \mathbb{C}, \text{ donc } Y = 2iA \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \vdots \\ \sin(q\theta) \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\sin((k-1)\theta) + \sin((k+1)\theta) = 2 \cos \theta \sin(k\theta)$, donc avec encore $y_0 = y_{q+1} = 0$, la suite finie $(\sin(k\theta))_{k \in \llbracket 1, q \rrbracket}$ vérifie la relation de récurrence $y_{k-1} + y_{k+1} = 2 \cos \theta y_k$ pour

tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \vdots \\ \sin(q\theta) \end{pmatrix}$ vérifie $BY = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right)Y$, donc est un vecteur propre de

B et $2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right)$ est effectivement valeur propre de B .

Finalement :

$Sp(B) = \left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right), j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}$	Pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$: $\ker \left[2 \cos\left(\frac{j\pi}{q+1}\right) I_q - B \right] = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{j\pi}{q+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(q \frac{j\pi}{q+1}\right) \end{pmatrix} \right)$
--	--

Q33. et Q34 Très rarement traitées.

Q34. D'après la question **Q29**, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée quel que soit le choix de F_0 si et seulement si $Sp(A) \subset [-1, 1]$. Or, comme par hypothèse, $A = (1-2r)I_q + rB$ avec $r > 0$, donc $r \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(B) &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, BX = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AX = (1-2r)X + r\lambda X = (1-(2-\lambda)r)X. \\ &\Leftrightarrow 1-(2-\lambda)r \in Sp(A) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Sp(A) &= \{1-(2-\lambda)r, \lambda \in Sp(B)\} \\ &= \left\{ 1 - \left(2 - 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) \right) r, j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\} \\ &= \left\{ 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(q+1)} \right), j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} Sp(A) \subset [-1, 1] &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(q+1)} \right) \leq 1 \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, q \rrbracket \\ &\Leftrightarrow 0 \leq r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(q+1)} \right) \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, q \rrbracket \end{aligned}$$

Or, $r > 0$, $0 < \frac{\pi}{2(q+1)} \leq \frac{j\pi}{2(q+1)} \leq \frac{q\pi}{2(q+1)} < \frac{\pi}{2}$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et la fonction $\sin^2$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$0 < \sin^2 \left(\frac{\pi}{2(q+1)} \right) \leq \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(q+1)} \right) \leq \sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(q+1)} \right).$$

Et :

$$0 \leq r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(q+1)} \right) \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, q \rrbracket \Leftrightarrow r \sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(q+1)} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

On veut que ceci soit vrai pour tout entier $q \geq 2$. Or, la suite $\left(\sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(q+1)} \right) \right)_{q \geq 2}$ croît et converge vers 1, donc $r \sin^2 \left(\frac{q\pi}{2(q+1)} \right) \leq \frac{1}{2}$ pour tout entier $q \geq 2$ si et seulement si $r \leq \frac{1}{2}$.

Finalement :

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée quel que soit le choix de F_0 et $q \geq 2$ si et seulement si $r \leq \frac{1}{2}$.

IV Équation de diffusion et marche aléatoire

Il n'y avait pas de réelles difficultés dans cette partie portant sur le programme de PCSI, sinon de rédaction.

IV.A –

Q35. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{2}(X_n + 1)$.

Comme $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a $Y_n(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}(-1+1), \frac{1}{2}(1+1)\right\} = \{0, 1\}$ et $P(Y_n = 1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \frac{1}{2}(X_n + 1) \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.$$

Les X_k sont indépendantes, donc les Y_k le sont aussi d'après le lemme des coalitions, et comme elles suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}.$$

Q35. La loi de Bernoulli est le plus souvent obtenue par les candidats qui traitent la question (56 %), mais on oublie assez souvent de parler de l'indépendance pour justifier la loi binomiale, que certains retrouvent par un raisonnement (celui du cours) inutile.

Q36. Soit $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$. On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n (2Y_k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n Y_k - n = 2Z_n - n.$$

Donc :

$$P(S_n = k) = P(2Z_n - n = k) = P\left(Z_n = \frac{n+k}{2}\right).$$

Or, $Z_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc Z_n est à valeurs entières. Or, si n et k ne sont pas de la même parité, alors $n+k$ est impair, donc $\frac{n+k}{2}$ n'est pas un entier et $P\left(Z_n = \frac{n+k}{2}\right) = 0$. Ainsi :

$$\text{Si } n \text{ et } k \text{ ne sont pas de la même parité, alors } P(S_n = k) = 0.$$

Q36. Comme indiqué précédemment, beaucoup de méthodes descriptives peu, voire pas du tout, convaincantes. Des candidats ont fait une récurrence sur n , correcte, mais longue à rédiger.

Q37. Si n et k sont de la même parité, alors $n+k$ est pair, donc $\frac{n+k}{2}$ est entier et comme $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$,

$\frac{n+k}{2} \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donc :

$$P(S_n = k) = P\left(Z_n = \frac{n+k}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n+k}{2}}.$$

Et ainsi :

$$\text{Si } n \text{ et } k \text{ ne sont pas de la même parité, alors } P(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

Q37. Conséquence immédiate des deux questions précédentes pour ceux qui ont obtenu la relation liant Z_n et S_n et la loi de S_n , certains candidats ont tout de même réussi à y répondre à l'aide d'un dénombrement sans avoir reconnu la loi binomiale.

IV.B –

Q38. Posons $n = \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor$.

- Si $\tau > 1$, alors $0 < \frac{1}{\tau} < 1$, donc $n = 0$ et comme δS_n modélise la position de la particule au temps $n\tau$, δS_0 donne la position initiale, qui est l'origine, soit $\delta S_0 = 0$ et donc $V(\delta S_0) = 0$.
- Si $0 < \tau \leq 1$, alors $\frac{1}{\tau} \geq 1$, donc $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$V(\delta S_n) = V(\delta(2Z_n - n)) = V(2\delta Z_n - n\delta) = 4\delta^2 V(Z_n) = 4\delta^2 n \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \delta^2 n.$$

Ainsi, dans tous les cas :

$$V(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor$$

Q38. Question facile si l'on relie Z_n et S_n , peu abordée (15 %).

Q39. Pour tout réel $\tau > 0$, on a $\frac{1}{\tau} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{\tau} \right\rfloor \leq \frac{1}{\tau}$, donc :

$$\frac{\delta^2}{\tau} - \delta^2 < V(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) \leq \frac{\delta^2}{\tau}.$$

Or, $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\delta^2}{\tau} = +\infty$, donc $\frac{\delta^2}{\tau} - \delta^2 \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\delta^2}{\tau}$ et le théorème des gendarmes appliqué aux équivalents permet de conclure que :

$$V(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\delta^2}{\tau}$$

Q39. Il fallait justifier que $\lfloor 1/\tau \rfloor \sim_{0^+} 1/\tau$.

Q40. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$p_n(k) = P(S_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \llbracket -n, n \rrbracket \text{ ou } n+k \text{ est impair} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \frac{1}{2^n} & \text{si } k \in \llbracket -n, n \rrbracket \text{ et } n+k \text{ est pair} \end{cases}$$

Considérons plusieurs cas.

- Si $n+k$ est pair, alors $(n+1)+k$, $n+(k+1)$ et $n+(k-1)$ sont impairs, donc :

$$p_{n+1}(k) = p_n(k+1) = p_n(k-1) = 0.$$

Et :

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{-p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2 - 2p_n(k)}{2\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}.$$

Remarquons que ce cas englobe $k = -n$ ($n+k=0$) et $k = n$ ($n+k=2n$).

- Si $n+k$ est impair et $k \notin \llbracket -(n+1), n+1 \rrbracket$, alors $k-1$, k , $k+1 \notin \llbracket -n, n \rrbracket$, donc :

$$p_{n+1}(k) = p_n(k-1) = p_n(k) = p_n(k+1) = 0.$$

Et :

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2} = 0.$$

- Si $n+k$ est impair (donc $p_n(k)=0$) et $k \in \llbracket -n+1, n-1 \rrbracket$, alors $(n+1)+k$, $n+(k+1)$ et $n+(k-1)$ sont pairs, $k \in \llbracket -(n+1), n+1 \rrbracket$ et $k+1, k-1 \in \llbracket -n, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} &= \frac{p_{n+1}(k)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \binom{n+1}{\frac{n+1+k}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2} &= \frac{1}{2\tau} (p_n(k+1) + p_n(k-1)) \\ &= \frac{1}{2\tau} \left[\binom{n}{\frac{n+k+1}{2}} \frac{1}{2^n} + \binom{n}{\frac{n+k-1}{2}} \frac{1}{2^n} \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\binom{n}{\frac{n+k+1}{2}} + \binom{n}{\frac{n+k+1}{2} - 1} \right] \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{\tau} \binom{n+1}{\frac{n+k+1}{2}} \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}.$$

- Si $k = -n-1$, alors $k+n = -1$ est impair et $k-1 = -n-2 \notin \llbracket -n, n \rrbracket$ donc $p_n(k) = p_n(k-1) = 0$, et :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} &= \frac{p_{n+1}(-n-1)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \binom{n+1}{0} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2} &= \frac{p_n(-n)}{2\tau} = \frac{1}{2\tau} \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} \end{aligned}$$

- Si $k = n+1$, alors $k+n = 2n+1$ est impair et $k+1 = n+2 \notin \llbracket -n, n \rrbracket$, donc $p_n(k) = p_n(k+1) = 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} &= \frac{p_{n+1}(n+1)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2} &= \frac{p_n(k-1)}{2\tau} = \frac{1}{2\tau} \binom{n}{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} \end{aligned}$$

Finalement, dans tous les cas :

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}$$

Q40. Deux voies possibles pour cette question, également choisies par les candidats : l'application de la formule de Pascal avec disjonction des cas ou la formule des probabilités totales. Seules les meilleures copies y arrivent.

Q41. La condition de stabilité établie à la partie III était $r = \frac{\tau}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}$, donc $\frac{\delta^2}{\tau} \geq 2$.

On a avait $V\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right) \underset{\tau \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\delta^2}{\tau}$, donc :

Pour τ proche de 0, $V\left(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}\right) \geq 2$.

Q41. À peine plus d'une dizaine de candidats arrivent à répondre, de façon cohérente vis-à-vis du sujet, à cette question.

Conclusion

Ce sujet complet et dense, certainement apprécié des candidats bien préparés, est au cœur du programme de PC et proche des contenus du cours. Il a mis en évidence une très forte hétérogénéité des niveaux, et de réelles difficultés liées à la notion d'intégrabilité d'une fonction et aux théorèmes puissants associés. Cependant plus d'un tiers des candidats ont produit un travail de qualité.