Corrigé du DS n° 7

A. Définition de $A_zP(X)$

1) Soient $P,Q\in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}A_z\left(P+\lambda Q\right)&=(z-X)\left(P+\lambda Q\right)'+n\left(P+\lambda Q\right)\\&=(z-X)\left(P'+\lambda Q'\right)+n\left(P+\lambda Q\right)\\&=(z-X)P'+\lambda(z-X)Q'+nP+\lambda nQ\\&=(z-X)P'+nP+\lambda(z-X)Q'+\lambda nQ\\&=A_zP+\lambda A_zQ\end{aligned}$$

Ainsi, A_z est linéaire.

Pour prendre de l'avance sur la question 3, considérons la famille $\left((X-z)^k\right)_{0\le k\le n}$ de $\mathbb{C}_n[X]$. Cette famille est échelonnée en degrés et contient $n+1=\dim\mathbb{C}_n[X]$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

On a $A_z\left((X-z)^0\right)=A_z1=n$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}A_z\left((X-z)^k\right)&=(z-X)\left((X-z)^k\right)'+n\left((X-z)^k\right)\\&=-(X-z)\left(k(X-z)^{k-1}\right)+n(X-z)^k\\&=(n-k)(X-z)^k\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\deg\left[A_z\left((X-z)^k\right)\right]=k\le n-1$ et $A_z\left((X-z)^n\right)=0$.

Ainsi, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $A_z\left((X-z)^k\right)\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$, donc A_z est à images dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et finalement :

$$\boxed{A_z \text{ définit une application linéaire de } \mathbb{C}_n[X] \text{ dans } \mathbb{C}_{n-1}[X].}$$

2) ***Attention*** *: question un peu piège…*

Soit $P\in\mathbb{C}_n[X]$.

Avec A_{z_1} vu comme application de $\mathbb{C}_n[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a $A_{z_1}P=(z_1-X)P'+nP\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et avec A_{z_2} vu comme application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{C}_{n-2}[X]$, on a :

$$\begin{aligned}A_{z_2}\left(A_{z_1}P\right)&=(z_2-X)\left(A_{z_1}P\right)'+(n-1)\left(A_{z_1}P\right)\\&=(z_2-X)\left((z_1-X)P'+nP\right)'+(n-1)\left((z_1-X)P'+nP\right)\\&=(z_2-X)\left((z_1-X)P''-P'+nP'\right)+(n-1)\left((z_1-X)P'+nP\right)\\&=(z_1-X)(z_2-X)P''+(n-1)(z_2-X)P'+(n-1)(z_1-X)P'+(n-1)nP\\&=(z_1-X)(z_2-X)P''+(n-1)(z_2+z_1-2X)P'+(n-1)nP\end{aligned}$$

Si on échange z_1 et z_2 dans cette dernière expression, on obtient la même chose, donc :

$$\boxed{A_{z_2}\left(A_{z_1}P\right)=A_{z_1}\left(A_{z_2}P\right)}$$

3) Avec ce que nous avons fait plus haut, nous allons répondre dans le désordre à cette question…

Dans la question 1, on a vu que $\left((X-z)^k\right)_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et que, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$A_z\left((X-z)^k\right)=(n-k)(X-z)^k.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}A_z&=\operatorname{Vect}\left(A_z\left((X-z)^0\right),A_z\left((X-z)^1\right),\dots,A_z\left((X-z)^{n-1}\right),A_z\left((X-z)^n\right)\right)\\&=\operatorname{Vect}\left((X-z)^0,(X-z)^1,\dots,(X-z)^{n-1},0\right)\\&=\operatorname{Vect}\left((X-z)^0,(X-z)^1,\dots,(X-z)^{n-1}\right)\\&=\mathbb{C}_{n-1}[X]\end{aligned}$$

Le théorème du rang donne alors :

$$\dim\mathbb{C}_n[X]=n+1=rg\left(A_z\right)+\dim\left(\ker A_z\right)=\dim\mathbb{C}_{n-1}[X]+\dim\left(\ker A_z\right)=n+\dim\left(\ker A_z\right).$$

Donc, $\dim\left(\ker A_z\right)=1$ et comme $A_z\left((X-z)^n\right)=0$, on obtient :

$$\boxed{\ker A_z=\operatorname{Vect}\left((X-z)^n\right)\text{ et }\operatorname{Im}A_z=\mathbb{C}_{n-1}[X]}$$

4) Toujours avec la question 1, et en notant $\mathcal{B}$ la base $\left((X-z)^k\right)_{0\le k\le n}$ de $\mathbb{C}_n[X]$, on a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\widehat{A_z}\left((X-z)^k\right)=(n-k)(X-z)^k.$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z})=diag\left(n,n-1,\dots,1,0\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet\ \ \widehat{A_z}\text{ est diagonalisable ;}\\ \bullet\ \ Sp(\widehat{A_z})=\{0,1,\dots,n-1,n\}\ ;\\ \bullet\ \ \forall\,k\in[\![0,n]\!],\ \ker\left(A_z-k\,id_{\mathbb{C}_n[X]}\right)=\operatorname{Vect}\left((X-z)^k\right).\end{array}}$$

5) On a $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{C}_n[X]\right)$ tel que $\widehat{A_z}E=E\widehat{A_z}$.

Si on note $M_{\mathcal{B}}(E)=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n+1}$, on a, avec $M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z})=diag\left(n,n-1,\dots,1,0\right)$:

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z}E)&=M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z})M_{\mathcal{B}}(E)=\left((n+1-i)b_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n+1}\\M_{\mathcal{B}}(E\widehat{A_z})&=M_{\mathcal{B}}(E)M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z})=\left((n+1-j)b_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n+1}\end{aligned}$$

Et comme $\widehat{A_z}E=E\widehat{A_z}$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z}E)=M_{\mathcal{B}}(E\widehat{A_z})$, on a :

$$\widehat{A_z}E = E\widehat{A_z} \iff \forall (i,j)\in [\![0,n]\!]^2,\ (n+1-i)b_{i,j} = (n+1-j)b_{i,j}$$
$$\iff \forall (i,j)\in [\![0,n]\!]^2,\ (j-i)b_{i,j} = 0$$
$$\iff \forall (i,j)\in [\![0,n]\!]^2,\ i\neq j,\ b_{i,j} = 0$$

Ainsi, en notant $b_{i,i} = b_i$ pour tout $i\in [\![1,n+1]\!]$, on a $B = diag\left(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\right)$.

Par ailleurs, pour tout $Q\in \mathbb{C}_n[X]$, on a $Q(\widehat{A_z}) = E$ si et seulement si $Q\left(M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z})\right) = M_{\mathcal{B}}(E) = B$ et :

$$Q\left(M_{\mathcal{B}}(\widehat{A_z})\right) = Q\left(diag\left(n, n-1, \dots, 1, 0\right)\right) = diag\left(Q(n), Q(n-1), \dots, Q(1), Q(0)\right).$$

Alors, il existe $Q\in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $Q(\widehat{A_z}) = E$ si et seulement s'il existe $Q\in \mathbb{C}_n[X]$ tel que :

$$diag\left(Q(n), Q(n-1), \dots, Q(1), Q(0)\right) = B = diag\left(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\right).$$

Autrement dit si et seulement si $Q(k) = b_{n+1-k}$ pour tout $k\in [\![0,n]\!]$.

Il suffit alors de prendre :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} b_{n+1-k}L_k \quad \text{avec} \quad L_k = \frac{\prod_{i=0, i\neq k}^{n}(X-i)}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n}(k-i)} \quad \text{pour tout } k\in [\![0,n]\!].$$

Les L_k sont les polynômes de Lagrange associé aux $n+1$ réels distincts : 0, 1, … , $n-1$, n.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe bien } Q = \sum_{k=0}^{n} b_{n+1-k}L_k \text{ tel que } Q(\widehat{A_z}) = E.}$$

B. Définition de δ_ξ

6) Remarquons déjà que f est une involution $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ dans lui-même (bijection telle que $f^{-1} = f$).

Soit $z\in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. On a :

$$z\in f(C) \iff f^{-1}(z) = f(z) = \frac{1}{z}\in C \iff \left|\frac{1}{z} - z_0\right| = R \iff \left|1 - z_0 z\right|^2 = R^2\left|z\right|^2$$
$$\iff (1 - z_0 z)\left(\overline{1 - z_0 z}\right) = R^2 z\overline{z} \iff (1 - z_0 z)\left(1 - \overline{z_0}\,\overline{z}\right) = R^2 z\overline{z}$$
$$\iff 1 - \overline{z_0}\,\overline{z} - z_0 z + \left|z_0\right|^2 z\overline{z} - R^2 z\overline{z} = 0 \iff 1 - re^{i\alpha}\overline{z} - re^{-i\alpha}z + (r^2 - R^2)z\overline{z} = 0$$

Avec $r^2 - R^2 > 0$, on obtient :

$$z\in f(C) \iff z\overline{z} - \frac{r}{r^2 - R^2}e^{-i\alpha}z - \frac{r}{r^2 - R^2}e^{i\alpha}\overline{z} = -\frac{1}{r^2 - R^2}$$

En posant $z_0' = \frac{r}{r^2 - R^2}e^{i\alpha}$, on obtient :

$$z\in f(C) \iff z\overline{z} - \overline{z_0}'z - z_0'\overline{z} + z_0'\overline{z_0}' = \left(\frac{r}{r^2 - R^2}\right)^2 - \frac{1}{r^2 - R^2} = \left(\frac{R}{r^2 - R^2}\right)^2 \iff \left|z - z_1\right| = \frac{R}{r^2 - R^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(C) \text{ est le cercle de centre } z_0' = \frac{r}{r^2 - R^2} e^{i\alpha} \text{ et de rayon } R' = \frac{R}{r^2 - R^2}.}$$

On a :

$$|0 - z_1| - \frac{R}{r^2 - R^2} = \frac{r}{r^2 - R^2} - \frac{R}{r^2 - R^2} = \frac{r - R}{r^2 - R^2} = \frac{1}{r + R} > 0.$$

Donc :

$$\boxed{0 \in f(C)^+}$$

7) On veut $f(C^-) = f(C)^-$.

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et D_u la demi-droite ouverte issue de 0 et passant par *u*. On a $D_u = \left\{\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ et :

$$f(D_u) = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, f^{-1}(z) = f(z) = \frac{1}{z} \in D_u \right\}$$
$$= \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \frac{1}{z} = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \right\} = \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{1}{u}, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \right\} = \left\{ \mu f(u), \mu \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Ainsi, $f(D_u)$ est la demi-droite ouverte issue de 0 et passant par $f(u)$, soit $f(D_u) = D_{f(u)}$.

Soit $u \in C^-$.

D'après le résultat admis, il existe $A, B \in C \cap D_u$ tels que $u \in]A, B[$ (avec $A \neq B$).

On a alors $f(A), f(B) \in f(C \cap D_u) = f(C) \cap f(D_u)$ avec $f(A) \neq f(B)$ (*f* est injective).

De plus, $A \in D_u$ et $B \in D_u$, donc $A = au$ et $B = bu$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $A \neq B$, on peut choisir $a < b$ et comme $u \in]A, B[$, on a $a < 1 < b$.

On a alors $f(A) = \frac{1}{a} f(u)$ et $f(B) = \frac{1}{b} f(u)$, avec $\frac{1}{b} < 1 < \frac{1}{a}$, donc $f(u) \in]f(B), f(A)[$.

Ainsi, $f(D_u) = D_{f(u)}$ rencontre le cercle $f(C)$ en deux points distincts $f(A)$ et $f(B)$ tels que $f(u) \in]f(B), f(A)[$. D'après le résultat admis, ceci entraine que $f(u) \in f(C)^-$ et ainsi :

$$\underline{f(C^-) \subset f(C)^-}.$$

Si on note $C' = f(C)$, qui est un cercle, on a alors $f(C'^-) \subset f(C')^-$ et donc, avec $f(C') = f\left(f(C)\right) = C$, on obtient :

$$f\left(f(C'^-)\right) = C'^- \subset f\left(f(C')^-\right) \iff \underline{f(C)^- \subset f(C^-)}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{f(C^-) = f(C)^-}$$

8) Si $0 \in C^+$ (0 est à l'extérieur strict de C) et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $z_i \in C^-$ (z_i est à l'intérieur strict de C), alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $z_i \neq 0$ et ainsi, $0 \notin \{z_i, i \in [\![1,n]\!]\}$ donc le complexe $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i - 0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)$ est bien défini.

De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $z_i \in C^-$, donc $f(z_i) \in f(C^-) = f(C)^-$.

Avec les notations de la question **6** ($f(C)$ est le cercle de centre z_0' et de rayon R'), on a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|f(z_i) - z_0'| < R'$ et donc :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i) - z_0'\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_0'\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[f(z_i) - z_0'\right]\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|f(z_i) - z_0'| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R' = R'.$$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i - 0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i) \in f(C)^-.$$

Ceci prouve que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i - 0} \neq 0$, car $0 \in C^+$ et donc que :

$$\boxed{\delta_0 \text{ est bien défini.}}$$

On a de plus :

$$f(\delta_0) = \frac{1}{\delta_0} = \frac{1}{\delta_0 - 0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i - 0} \in f(C)^-.$$

Alors, $f\left(f(\delta_0)\right) \in f\left(f(C)^-\right) = f\left(f(C^-)\right) = C^-$, soit :

$$\boxed{\delta_0 \in C^-}$$

9) Notons C_ξ le cercle de centre $z_0 - \xi$ et de rayon R et t la translation de vecteur d'affixe $-\xi$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|t(z) - t(z_0)| = |(z-\xi) - (z_0 - \xi)| = |z - z_0|$, donc :

$$|z - z_0| = R \iff |t(z) - t(z_0)| = R$$
$$|z - z_0| > R \iff |t(z) - t(z_0)| > R$$
$$|z - z_0| < R \iff |t(z) - t(z_0)| < R$$

Comme t est bijective (de réciproque t^{-1} la translation de vecteur d'affixe ξ), on a :

$$t(C) = C_\xi \qquad t(C^+) = C_\xi^+ \qquad t(C^-) = C_\xi^-$$

Alors, comme $\xi \in C^+$ et $z_i \in C^-$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $0 = t(\xi) \in t(C^+) = C_\xi^+$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $z_i' = t(z_i) = z_i - \xi \in t(C^-) = C_\xi^-$.

Alors, en appliquant les résultats de la question précédente, on peut conclure que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i-\xi}$ existe et est non nul, donc δ_ξ est bien défini avec :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i-\xi}=\frac{1}{\delta_\xi-\xi}=f(\delta_\xi-\xi)\in f(C_\xi)^-=f(C_\xi^-).$$

Donc, $\delta_\xi-\xi\in C_\xi^-$ et $t^{-1}(\delta_\xi-\xi)=\delta_\xi\in t^{-1}(C_\xi^-)=C^-$.

Ainsi :

$$\boxed{\delta_\xi \text{ est bien défini et } \delta_\xi\in C^-.}$$

C. Condition d'apolarité

10) Comme $\xi\in\mathbb{C}\setminus\{z_i, i\in[\![1,n]\!]\}$, $P(\xi)=\prod_{i=1}^{n}(\xi-z_i)\neq 0$.

De plus, $P'(X)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(X-z_k)$, donc, comme $\xi\neq z_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on peut écrire :

$$P'(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(\xi-z_k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(\xi)}{\xi-z_i}=P(\xi)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_i}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_i}}$$

Alors, si $P'(\xi)\neq 0$, on a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i-\xi}\neq 0$, donc δ_ξ est défini et :

$$\frac{1}{\delta_\xi-\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi-z_i}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i-\xi}=-\frac{1}{n}\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}\quad\Leftrightarrow\quad\delta_\xi-\xi=-n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}.$$

Soit :

$$\boxed{\delta_\xi=\xi-n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}}$$

11) On a $A_zP=(z-X)P'+nP$. Pour tout $\xi\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} A_zP(\xi)=0 \quad&\Leftrightarrow\quad (z-\xi)P'(\xi)+nP(\xi)=0\\ &\Leftrightarrow\quad (\xi-z)P'(\xi)=nP(\xi)\\ &\Leftrightarrow\quad P'(\xi)=P(\xi)=0 \text{ ou } \xi-n\frac{P(\xi)}{P'(\xi)}=z \text{ avec } P'(\xi)\neq 0\end{aligned}$$

Or, avec $P=\prod_{i=1}^{n}(X-z_i)$, $P(\xi)=0$ si et seulement si $\xi\in\left\{z_i,\, i\in[\![1,n]\!]\right\}$ et si $\xi\notin\left\{z_i,\, i\in[\![1,n]\!]\right\}$, on a alors $P'(\xi)\neq 0$ quand $A_zP(\xi)=0$ et $\delta_\xi=\xi-n\dfrac{P(\xi)}{P'(\xi)}$. Ainsi :

$$A_zP(\xi)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\xi=z_i \text{ avec } P'(z_i)=0 \text{ et } i\in[\![1,n]\!]\\ \quad ou\\ \delta_\xi=z \text{ avec } \xi\in\mathbb{C}\setminus\left\{z_i,\, i\in[\![1,n]\!]\right\}\end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros complexes de } A_zP \text{ est } \left\{z_i,\, i\in[\![1,n]\!],\, P'(z_i)=0\right\}\cup\left\{\xi\in\mathbb{C}\setminus\left\{z_i,\, i\in[\![1,n]\!]\right\},\, \delta_\xi=z\right\}.}$$

12) On a $P=\prod_{i=1}^{n}(X-z_i)=X^n-\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-1}+Q_1$ avec $Q_1\in\mathbb{C}_{n-2}[X]$ (avec $n\geq 2$ d'après l'énoncé), et :

$$\begin{aligned}P'&=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{n}(X-z_k)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(X^{n-1}-\left(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}z_k\right)X^{n-2}+R_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}X^{n-1}-\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq i}^{n}z_k\right)X^{n-2}+\sum_{i=1}^{n}R_i=nX^{n-1}-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}z_k-z_i\right)\right)X^{n-2}+Q_2\\&=nX^{n-1}-(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-2}+Q_2\end{aligned}$$

avec $R_1,\dots,R_n,Q_2=\sum_{i=1}^{n}R_i\in\mathbb{C}_{n-3}[X]$ quand $n\geq 3$, $R_1=\dots=R_n=Q_2=0$ sinon.

Alors :

$$\begin{aligned}A_zP&=(z-X)P'+nP\\&=(z-X)\left(nX^{n-1}-(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-2}+Q_2\right)+n\left(X^n-\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-1}+Q_1\right)\\&=\left(nz-\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-1}-z(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-2}+(z-X)Q_2+nQ_1\end{aligned}$$

Et $-z(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)X^{n-2}+(z-X)Q_2+nQ_1\in\mathbb{C}_{n-2}[X]$ comme combinaison linéaire de polynômes de degré au plus $n-2$. Ainsi, le degré de A_zP est strictement inférieur à $n-1$ si et seulement si le coefficient de X^{n-1} dans son expression développée est nul, soit $nz-\sum_{i=1}^{n}z_i=0$. Autrement dit :

$$\boxed{\deg\left(A_zP\right)<n-1 \quad\Leftrightarrow\quad z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i}$$

13) Remarquons que $A_z P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, donc est de degré au plus $n-1$.

On a $\{z_i, i \in [\![1,n]\!]\} \subset C_1^-$ et $z \in C_1 \cup C_1^+$. Comme $C_1^- \cap \left(C_1 \cup C_1^+\right) = \varnothing$, on a encore la condition :

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{z_i, i \in [\![1,n]\!]\}.$$

Notons respectivement ω et R le centre et le rayon de C_1. On a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|z_i - \omega| < R$ et, comme dans la question **8** :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i - \omega\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(z_i - \omega)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i - \omega| < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R = R.$$

Donc, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \in C_1^-$ et ainsi, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \neq z$. D'après la question, le degré de $A_z P$ est alors supérieur ou égal à $n-1$ et comme il vaut au plus $n-1$:

$$\boxed{\deg\left(A_z P\right) = n-1}$$

D'après la question **11**, tout zéro complexe de $A_z P$ est soit l'un des z_i, soit un complexe ξ différent de tous les z_i et tel que $\delta_\xi = z$. Dans le premier cas, le zéro appartient à C_1^-.

On a vu que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|z_i - \omega| < R$, donc $\max_{i \in [\![1,n]\!]} |z_i - \omega| < R$ et il existe $R' \in \left]\max_{i \in [\![1,n]\!]} |z_i - \omega|, R\right[$.

Considérons alors le cercle C_2, de centre ω et de rayon R'. On a $\max_{i \in [\![1,n]\!]} |z_i - \omega| < R' < R$, donc :

$$\{z_i, i \in [\![1,n]\!]\} \subset C_2^- \subset C_1^- \quad \text{et} \quad z \in C_1 \cup C_1^+ \subset C_2^+.$$

Alors, d'après la question **9**, si $\xi \in C_2^+$, alors $\delta_\xi = z \in C_2^-$, ce qui est absurde, donc $\xi \in C_2 \cup C_2^- \subset C_1^-$.

Ainsi, dans tous les cas, le zéro appartient bien à C_1^-, donc :

$$\boxed{\text{Les } n-1 \text{ zéros de } A_z P \text{ appartiennent tous à } C_1^-.}$$

14) Remarquons déjà que comme A_z est linéaire, les zéros de $A_z(uP) = u A_z P$ sont les mêmes que ceux de $A_z P$ pour tout $u \in \mathbb{C}^*$. Ainsi, le résultat de la question précédente reste valable en remplaçant $\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ par $P = u\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$, autrement dit n'importe quel polynôme *P* de degré exactement *n*.

Supposons que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $z_i' \in C \cup C^+$.

Prouvons alors par récurrence finie sur *k* que pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $A_{z_{n-k}'} \dots A_{z_n'} P$ est de degré exactement $n-k-1$ et que ses $n-k-1$ racines appartiennent toutes à C^-.

- Pour $k=0$, comme $\deg P = n$, $\{z_i, i \in [\![1,n]\!]\} \subset C^-$, autrement dit, les n racines de P appartiennent toutes à C^- et $z_n' \in C \cup C^+$, la question précédente permet alors de conclure que $\deg\left(A_{z_n'} P\right) = n-1$ et les n racines de $A_{z_n'} P$ appartiennent toutes à C^-. La propriété est donc vraie au rang $k=0$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $k\in[\![0,n-2]\!]$ (possible car $n\geq 2$ et on a $k+1\in[\![0,n-1]\!]$).
  On a donc par hypothèse de récurrence, $\deg\left(A_{z_{n-k}'}\dots A_{z_n'}P\right)=n-k-1$ et les $n-k-1$ racines de $A_{z_{n-k}'}\dots A_{z_n'}P$ appartiennent toutes à C^-. De plus, par hypothèse on a $z_{n-k-1}'\in C\cup C^+$. La question précédente permet à nouveau de conclure que $\deg\left(A_{z_{n-k-1}'}\left(A_{z_{n-k}'}\dots A_{z_n'}P\right)\right)=n-k-1-1$ et les $n-k-1-1$ racines de $A_{z_{n-k-1}'}\left(A_{z_{n-k}'}\dots A_{z_n'}P\right)=A_{z_{n-k-1}'}A_{z_{n-k}'}\dots A_{z_n'}P$ appartiennent toutes à C^-. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.
Ceci permet de conclure que pour $k=n-1$, $\deg\left(A_{z_1'}A_{z_2'}\dots A_{z_n'}P\right)=0\neq-\infty$ et donc que $A_{z_1'}A_{z_2'}\dots A_{z_n'}P$ n'est pas nul. Ainsi, supposer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $z_i'\in C\cup C^+$ contredit l'hypothèse d'apolarité de P par rapport à Q, donc est absurde, et par conséquent :

$$\boxed{\text{Il existe } i\in[\![1,n]\!] \text{ tel que } z_i'\in C^-.}$$

15) On a $T(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_kX^k$, donc :

$$\int_0^1 T\left(a+t(b-a)\right)dt=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k\left(a+t(b-a)\right)^k\right)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k\int_0^1\left(a+t(b-a)\right)^k dt$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k\left[\frac{\left(a+t(b-a)\right)^{k+1}}{(k+1)(b-a)}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_k\,\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 T\left(a+t(b-a)\right)dt=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}a_kb_{n-(k+1)}$$

avec $b_{n-(k+1)}=(-1)^k\,\dfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, soit :

$$\boxed{b_k=(-1)^{n-1-k}\,\frac{b^{n-k}-a^{n-k}}{(n-k)(b-a)} \text{ pour tout } k\in[\![0,n-1]\!].}$$

16) On a $\Delta(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_kX^k$, donc :

$$\Delta(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{n-1-k}\,\frac{b^{n-k}-a^{n-k}}{(n-k)(b-a)}X^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{n-k}(-1)^{n-k}\,\frac{a^{n-k}-b^{n-k}}{b-a}X^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\frac{1}{n-k}\frac{(-a)^{n-k}-(-b)^{n-k}}{b-a}X^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{1}{n}\frac{(-a)^{n-k}-(-b)^{n-k}}{b-a}X^k$$
$$=\frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k}(-a)^{n-k}X^k-\binom{n}{k}(-b)^{n-k}X^k\right)$$
$$=\frac{1}{n(b-a)}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}(-a)^{n-k}X^k-\binom{n}{k}(-b)^{n-k}X^k\right)=\frac{(X-a)^n-(X-b)^n}{n(b-a)}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\Delta(X) = C_n\left((X-a)^n - (X-b)^n\right) \text{ avec } C_n = \frac{1}{n(b-a)} \neq 0\,.}$$

17) Comme les t_i sont les racines de P', on veut montrer que $A_{t_1}A_{t_2}\ldots A_{t_n}\Delta = 0$, c'est-à-dire que :

$$(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}A_{t_1}A_{t_2}\ldots A_{t_n}\Delta(X) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}a_k b_{n-(k+1)} = 0\,.$$

Et :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}a_k b_{n-(k+1)} = \int_0^1 P'\left(a+t(b-a)\right)dt = \left[\frac{1}{b-a}P\left(a+t(b-a)\right)\right]_0^1 = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}\,.$$

Et comme $P(b)=P(a)$, on a bien $A_{t_1}A_{t_2}\ldots A_{t_n}\Delta = 0$ et ainsi :

$$\boxed{\Delta(X) \text{ est apolaire par rapport à } P'(X)\,.}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, on a :

$$\Delta(z) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (z-a)^n = (z-b)^n\,.$$

Comme $a \neq b$, on ne peut avoir ni $z=a$, ni $\dfrac{z-b}{z-a} = 1$ et donc :

$$\Delta(z) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^n = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z-b}{z-a} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![1,n-1]\!].$$

Ainsi, les racines de Δ sont les $z_k = \dfrac{b-a\,e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ avec $k \in [\![1,n-1]\!]$.

Alors, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a :

$$\left|z_k - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{b-a\,e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{2b-2a\,e^{i\frac{2k\pi}{n}} - a(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) - b(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})}{2(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})}\right|$$

$$= \left|\frac{b(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}) - a(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}})}{2(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})}\right| = \frac{|b-a|}{2}\left|\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}\right| = \frac{|b-a|}{2}\left|\frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}+e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{-i\frac{k\pi}{n}}-e^{i\frac{k\pi}{n}}}\right| = \frac{|b-a|}{2}\left|\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right|$$

Soit :

$$\left|z_k - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}\left|\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{k\pi}{n} \in \left]0, \pi\right[$ et la fonction cotangente est décroissante sur $\left]0, \pi\right[$ donc :

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = -\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \le \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left|\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \le \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Remarquons que comme $n \ge 2$, $0 < \dfrac{\pi}{n} \le \dfrac{\pi}{2}$ et on a bien $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \ge 0$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\left|z_k - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ainsi, toutes les racines de Δ appartiennent au disque fermé $D_{n,a,b}$ de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon :

$$R_n(a,b) = \frac{|b-a|}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{|b-a|}{2}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Nous voulons prouver le **Théorème 1**, qui dit que le polynôme P' possède au moins une racine dans le disque fermé $D_{n,a,b}$ (les hypothèses adéquates sur P étant respectées : $\deg P = n$ et $P(a) = P(b)$).

Pour utiliser la question **14**, il faudrait que les racines de Δ appartiennent au disque ouvert de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $R_n(a,b)$, mais ce n'est pas le cas car z_1 et z_{n-1} sont sur le cercle.

Pour montrer ce que l'on veut, il faut donc ruser…

Pour tout réel $\varepsilon \ge 0$, appelons C_ε le cercle de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $R_n(a,b) + \varepsilon$.

Ainsi, C_0 est la frontière de $D_{n,a,b}$, c'est-à-dire le cercle de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $R_n(a,b)$, et on a $D_{n,a,b} = C_0 \cup C_0^-$. Par ailleurs, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $D_{n,a,b} \subset C_\varepsilon^-$.

Supposons qu'aucune racine de P' ne soit dans $D_{n,a,b}$. On a alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

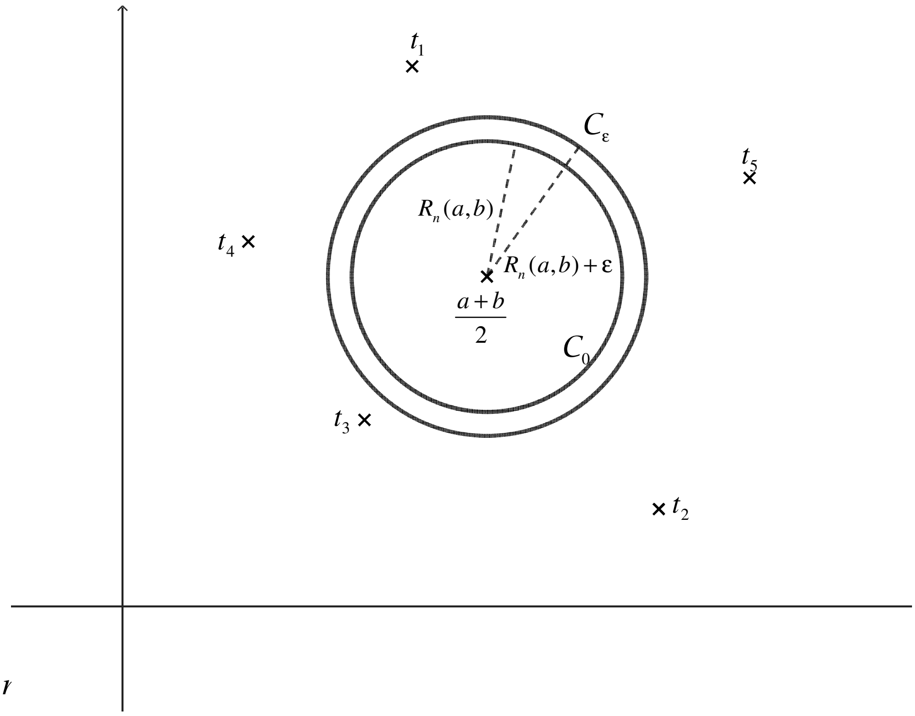
$$\left|t_i - \frac{a+b}{2}\right| > R_n(a,b).$$

Rappelons que les racines de P' étaient notées $t_1, \dots, t_{n-1}$.

Notons alors $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\limits_{i \in [\![1,n-1]\!]}\left[\left|t_i - \dfrac{a+b}{2}\right| - R_n(a,b)\right] > 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\left|t_i - \frac{a+b}{2}\right| > R_n(a,b) + \varepsilon.$$

Donc, tous les t_i, sont dans C_ε^+ comme sur la figure ci-après.



Or, pour tout $k \in [\![1, r$ … s un t_i dans C_ε^-, ce qui contredit ce que l'on vient de voir.

Ainsi, supposer qu'aucune racine de P' ne soit pas dans $D_{n,a,b}$ mène à une absurdité, donc l'un des t_i appartient à $D_{n,a,b}$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Le } \textbf{Théorème 1} \text{ est prouvé.}}$$