

<i>DS de Mathématiques n° 7</i>
---------------------------------

**Sujet n° 1 : X-ENS PSI – 2022***4 heures***Sujet n° 2 : Mines - 2010 - PC – Math 2***3 heures**Calculatrices autorisées*

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## Début de l'épreuve

Pour  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (y_1, \dots, y_d)$  dans  $\mathbb{R}^d$ , nous noterons :

- $x \cdot y$  le produit scalaire usuel de  $x$  et  $y$ .

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

- $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ , la norme euclidienne usuelle de  $x$ ,
- $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$  le segment joignant  $x$  à  $y$ .

On rappelle qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  est convexe si pour tout  $(x, y) \in A^2$ , on a  $[x, y] \subset A$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux parties non vides de  $\mathbb{R}^d$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous noterons

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b, a \in A, b \in B\}, \quad \lambda A := \{\lambda a, a \in A\} \\ A - B &:= A + (-1)B, \quad A - x := A - \{x\} \end{aligned}$$

nous noterons  $\dim(A)$  la dimension de l'espace vectoriel engendré par  $A - a$  où  $a$  est un élément quelconque de  $A$  (cette définition étant indépendante du choix de  $a \in A$ ). En particulier si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathbb{R}^d$  et  $x \neq y$ , on a  $\dim(\{x\}) = 0$ , et  $\dim([x, y]) = 1$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_{m \times d}(\mathbb{R})$ , nous identifierons toujours  $M$  à l'application linéaire dont  $M$  est la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^m$  et noterons donc

$$\text{Ker}(M) := \{x \in \mathbb{R}^d : Mx = 0\}, \quad \text{Im}(M) := \{Mx, x \in \mathbb{R}^d\}$$

enfin  $M^T$  désignera la transposée de  $M$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous noterons  $\mathbb{R}_+^k$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}^k$  dont les coordonnées sont dans  $\mathbb{R}_+$  et pour  $y_1$  et  $y_2$  dans  $\mathbb{R}^k$ , nous écrirons  $y_1 \geq y_2$  (ou  $y_2 \leq y_1$ ) quand  $y_1 - y_2 \in \mathbb{R}_+^k$ .

On rappelle enfin que toute suite bornée d'éléments de  $\mathbb{R}^k$  possède une extraction qui converge.

## Partie I : Projection et séparation

### Projection

Soit  $C$  une partie non vide, convexe et fermée de  $\mathbb{R}^d$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ , considérons :

$$\inf_{y \in C} \|x - y\|^2. \tag{1}$$

1) Montrer que (1) possède une unique solution (c'est à dire qu'il existe un unique  $y \in C$  tel que  $\|x - y\|^2 \leq \|x - z\|^2$  pour tout  $z \in C$ ) que nous appellerons projection de  $x$  sur  $C$  et noterons  $\text{proj}_C(x)$ . Montrer que  $x = \text{proj}_C(x)$  si et seulement si  $x \in C$ .

2) Soit  $y \in \mathbb{R}^d$  montrer que

$$y = \text{proj}_C(x) \iff y \in C \text{ et } (x - y) \cdot (z - y) \leq 0, \forall z \in C.$$

3) Montrer que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , on a

$$(\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2,$$

et en déduire que  $\text{proj}_C$  est continue.

4) Déterminer explicitement  $\text{proj}_C$  dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} i) C = \mathbb{R}_+^d, \quad ii) C = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq 1\}, \\ iii) C = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d y_i \leq 1 \right\}, \quad iv) C = [-1, 1]^d. \end{aligned}$$

## Séparation

Soit  $C$  et  $D$  deux parties convexes non vides de  $\mathbb{R}^d$  telles que

$$C \text{ est fermée et bornée, } D \text{ est fermée, et } C \cap D = \emptyset.$$

5) Montrer que  $D - C$  est une partie convexe fermée de  $\mathbb{R}^d$  ne contenant pas 0.

6) Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{R}^d$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$p \cdot x \leq p \cdot y - \varepsilon, \forall (x, y) \in C \times D.$$

(on dit que  $C$  et  $D$  peuvent être séparés strictement).

7) Soit  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\sigma_C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par :

$$\sigma_C(p) := \sup\{p \cdot x, x \in C\}$$

montrer que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \leq \sigma_C(p), \forall p \in \mathbb{R}^d\}$$

(de sorte que  $C$  est une intersection de demi-espaces fermés).

8) Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^d$  et  $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ , montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  tel que

$$p \cdot x \leq p \cdot y, \forall y \in A.$$

## Partie II : Points extrémaux

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^d$ , on appelle enveloppe convexe de  $E$  et l'on note  $\text{co}(E)$  l'ensemble

$$\text{co}(E) := \left\{ \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i, I \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^I \lambda_i = 1, (x_1, \dots, x_I) \in E^I \right\}.$$

Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^d$ , nous dirons que  $x \in A$  est un point extrémal de  $A$  si  $\forall (y, z, \lambda) \in A \times A \times ]0, 1[$ , on a

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z \Rightarrow y = z.$$

Nous noterons  $\text{Ext}(A)$  l'ensemble des points extrémaux de  $A$ .

### Cas particuliers

**9)** Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $I \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_I \in A$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_I) \in \mathbb{R}_+^I$  tels que  $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$ , montrer que :

- a)  $\sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in A$ ,
- b) si  $x := \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in \text{Ext}(A)$  alors  $x_i = x$  pour tout  $i \in \{1, \dots, I\}$  tel que  $\lambda_i > 0$ .

**10)** Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^d$  montrer que  $\text{co}(E)$  est le plus petit convexe contenant  $E$  et que  $\text{Ext}(\text{co}(E)) \subset E$ .

**11)** Soit  $A = \text{co}(E)$  où  $E$  est la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$E = \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \cup \{(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 0), \theta \in [0, 2\pi]\}$$

montrer que  $\text{Ext}(A)$  est non vide et n'est pas fermée.

**12)** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$  et  $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$  tels que

$$A := \{x \in \mathbb{R}^d : p_i \cdot x \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$$

soit non vide. Montrer que  $A$  est convexe et fermée. Soit  $x \in A$ , soit  $I(x) := \{i \in \{1, \dots, k\} : p_i \cdot x = b_i\}$  montrer que

$$x \in \text{Ext}(A) \iff \text{rang}(\{p_i, i \in I(x)\}) = d$$

en déduire que  $\text{Ext}(A)$  est un ensemble fini (éventuellement vide) dont le cardinal est inférieur ou égal à  $2^k$ .

## Cas d'un convexe fermé borné

Dans les trois questions qui suivent,  $K$  est une partie non vide, convexe, fermée et bornée de  $\mathbb{R}^d$ .

13) Soit  $p \in \mathbb{R}^d$ , posons

$$K_p := \{x \in K : p \cdot x \leq p \cdot y, \forall y \in K\}.$$

Montrer que  $K_p$  est non vide, convexe et fermée et que  $\text{Ext}(K_p) \subset \text{Ext}(K)$ .

14) Montrer que  $\text{Ext}(K)$  est non vide (on pourra se ramener au cas où  $0 \in K$  et raisonner sur la dimension de  $K$ ).

15) Montrer que  $K = \text{co}(\text{Ext}(K))$ .

## Partie III : Un résultat de dualité

### Cônes convexes

On dit qu'une partie  $F$  de  $\mathbb{R}^d$  est un cône si  $\lambda F \subset F$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $E$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^d$ , le cône polaire de  $E$  est défini par

$$E^+ := \{p \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \geq 0, \forall x \in E\}$$

et son cône bi-polaire par

$$E^{++} = (E^+)^+ := \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \cdot p \geq 0, \forall p \in E^+\}.$$

16) Montrer que  $E^+$  et  $E^{++}$  sont des cônes convexes fermés et que  $E \subset E^{++}$ .

17) Montrer que  $E = E^{++}$  si et seulement si  $E$  est un cône convexe fermé.

18) Soit  $\xi_1, \dots, \xi_k, k$  éléments de  $\mathbb{R}^d$  et

$$F := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k \right\}$$

montrer que  $F$  est un cône convexe fermé. Soit  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , montrer que l'équivalence entre :

- $\xi \in F$ ,
- $\xi \cdot x \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\xi_i \cdot x \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

## Programmation linéaire

Soit  $M \in \mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{R})$ ,  $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$  et  $p \in \mathbb{R}^d$ . Posons

$$\alpha := \inf \{ p \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, x \geq 0, Mx \leq b \}$$

et

$$\beta := \sup \{ b \cdot q : q \in \mathbb{R}^k, q \leq 0, M^T q \leq p \}$$

(en adoptant la convention :  $\inf \emptyset = +\infty$  et  $\sup \emptyset = -\infty$ ).

19) Montrer que  $\alpha \geq \beta$ .

20) On suppose qu'il existe  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\bar{x} \geq 0, M\bar{x} \leq b \text{ et } p \cdot \bar{x} = \alpha.$$

En notant  $M_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  dont les coordonnées sont les coefficients de la  $i$ -ème ligne de  $M$ , posons :

$$I := \{ i \in \{1, \dots, k\} : M_i \cdot \bar{x} = b_i \}$$

et

$$J := \{ j \in \{1, \dots, d\} : \bar{x}_j = 0 \}.$$

- a) Montrer que  $p \cdot z \geq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$z_j \geq 0 \text{ pour tout } j \in J \text{ et } M_i \cdot z \leq 0 \text{ pour tout } i \in I.$$

- b) Montrer qu'il existe  $\bar{q} \in \mathbb{R}^k$  tel que :

$$\bar{q} \leq 0, M^T \bar{q} \leq p, \bar{q} \cdot (M\bar{x} - b) = 0 \text{ et } (p - M^T \bar{q}) \cdot \bar{x} = 0.$$

- c) Montrer que  $b \cdot \bar{q} = \alpha = \beta$ .

## Partie IV : Systèmes linéaires sous-déterminés

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i|, \|x\|_\infty := \max \{ |x_i|, i = 1, \dots, d \}$$

$$I_+(x) := \{ i \in \{1, \dots, d\} : x_i > 0 \}, I_-(x) := \{ i \in \{1, \dots, d\} : x_i < 0 \}$$

et

$$I_0(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i = 0\}.$$

Soit  $M \in \mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{R})$  et supposons que

$$\text{rang}(M) = k.$$

Soit  $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , l'objectif de cette partie est de trouver une solution du système linéaire

$$Mx = b$$

ayant au plus  $k$  coordonnées non nulles par une méthode de minimisation. Pour ce faire, on s'intéresse à :

$$r := \inf \{ \|x\|_1, x \in \mathbb{R}^d, Mx = b \}.$$

**21)** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$\|x\|_1 = \max \{ x \cdot y, y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_\infty \leq 1 \},$$

et

$$\|x\|_\infty = \max \{ x \cdot y, y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_1 \leq 1 \}.$$

**22)** Notons  $C$  l'ensemble :

$$C := \{x \in \mathbb{R}^d : Mx = b, \|x\|_1 = r\}.$$

Montrer que  $C$  est non vide, convexe, fermé et borné.

**23)** Fixons  $\bar{x} \in C$ . Montrer qu'il existe  $q \in \text{Ker}(M)^\perp \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on ait

$$q_i \bar{x}_i = \|q\|_\infty |\bar{x}_i|.$$

**24)** Soit  $K$  l'ensemble des  $y \in \mathbb{R}^d$  tels que

$$My = b, y_i = 0 \forall i \in I_0(\bar{x}), q_i y_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, d\}$$

Montrer que  $K$  est non vide et inclus dans  $C$ .

**25)** Montrer que si  $y \in \text{Ext}(K)$  alors

$$h \in \text{Ker}(M) \text{ et } I_0(y) \subset I_0(h) \Rightarrow h = 0.$$

**26)** En déduire que si  $y \in \text{Ext}(K)$  alors le cardinal de  $I_+(y) \cup I_-(y)$  est inférieur ou égal à  $k$ .

**Fin du sujet.**

**A 2010 MATH II PC**

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.  
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,  
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH  
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,  
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2010

**SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**Filière PC**

(Durée de l'épreuve : trois heures)  
Sujet mis à la disposition des concours :  
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente  
sur la première page de la copie :*

*MATHÉMATIQUES II - PC*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Théorème de Rolle dans le cas complexe .

---

Dans ce problème on se propose de prouver l'analogie complexe suivant du théorème de Rolle :

**Théorème 1.** *Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes distincts et  $n$  un entier  $\geq 2$ . Soit  $P(X) \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n$  tel que  $P(a) = P(b)$ . Le polynôme dérivé  $P'(X)$  de  $P$  possède alors au moins un zéro  $z_0$  (ie  $P'(z_0) = 0$ ) dans le disque*

$$D_{a,b;n} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z - \frac{a+b}{2} \right| \leq R_n(a,b) \right\},$$

où

$$R_n(a,b) = \frac{|a-b|}{2} \frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}.$$

Soit  $P(X) = \sum_{l=0}^N u_l X^l \in \mathbb{C}[X]$ , le polynôme dérivé  $P'(X)$  de  $P(X)$ , est donné par :

$$P'(X) = \sum_{l=0}^{N-1} u_{l+1} (l+1) X^l.$$

Pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\binom{n}{k}$  désigne le coefficient binomial  $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ .

### A. Définition de $A_z P(X)$ .

On note  $\mathbb{C}_n[X]$  l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On définit le polynôme  $A_z P \in \mathbb{C}[X]$  par la formule :

$$A_z P(X) = (z - X)P'(X) + nP(X).$$

Cette définition de  $A_z$  dépend donc de l'espace de départ  $\mathbb{C}_n[X]$ .

- 1) Vérifier que  $A_z$  définit une application linéaire de  $\mathbb{C}_n[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ .
- 2) Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  et  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ . Prouver que :

$$A_{z_1} \left( A_{z_2} P \right) (X) = A_{z_2} \left( A_{z_1} P \right) (X),$$

où dans la composition  $A_{z_1} \circ A_{z_2}$  (du membre de gauche),  $A_{z_2}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_n[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  et  $A_{z_1}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ . Pareillement, dans la composition

$A_{z_2} \circ A_{z_1}$  (du membre de droite),  $A_{z_1}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_n[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  et  $A_{z_2}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ .

- 3) Pour  $z \in \mathbb{C}$ , déterminer l'ensemble des  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  tels que  $A_z P(X)$  soit le polynôme nul. (On pourra utiliser la famille formée par les polynômes  $(X - z)^k, 0 \leq k \leq n$ ). Déterminer alors l'image de l'application

$$A_z : \mathbb{C}_n[X] \mapsto \mathbb{C}_{n-1}[X].$$

- 4) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Déterminer les valeurs propres et sous espaces propres de l'endomorphisme  $\widehat{A}_z$  de  $\mathbb{C}_n[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \widehat{A}_z(P)(X) = (z - X)P'(X) + nP(X).$$

Montrer que  $\widehat{A}_z$  est diagonalisable.

- 5) On conserve les notations de la question précédente. Soit  $E$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$  commutant avec  $\widehat{A}_z$ . Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{C}_n[X]$  tel que  $Q(\widehat{A}_z) = E$ . (On pourra utiliser un polynôme associé à une interpolation de Lagrange convenable).

## B. Définition de $\delta_\xi$ .

On considère la bijection  $f$  :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} &\mapsto \frac{1}{z} = f(z) \end{aligned}$$

On se place dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  identifié à  $\mathbb{C}$ . On désignera par  $\mathcal{C}$  un cercle (de centre  $z_0$  et de rayon  $R$  non nul) de  $\mathbb{C}$  :

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = R\}.$$

On notera respectivement  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  l'intérieur géométrique et l'extérieur géométrique de  $\mathcal{C}$ . Plus précisément :

$$\mathcal{C}^- = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}, \quad \mathcal{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| > R\}.$$

- 6) Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $R > 0$  tel que l'origine 0 appartient à  $\mathcal{C}^+$ . On pose  $z_0 = re^{i\alpha}$  où  $r \in ]R, +\infty[$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Prouver que  $f(\mathcal{C})$  est un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de  $r, \alpha, R$ . Vérifier en outre que l'origine 0 appartient à  $f(\mathcal{C})^+$ . (On pourra partir de

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 = R^2.)$$

- 7) On conserve les hypothèses et notations de la question précédente. Prouver que  $f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-$ . C'est à dire que  $f$  transforme l'intérieur du cercle  $\mathcal{C}$  en la totalité de l'intérieur du cercle  $f(\mathcal{C})$  (on pourra utiliser le fait *admis* suivant. Un point  $u$  de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  appartient à  $\mathcal{C}^-$  si et seulement si la demi-droite  $D_u$  issue de 0 et passant par  $u$  rencontre  $\mathcal{C}$  en deux points distincts  $A, B$  tels que  $u$  appartient au segment *ouvert*  $]A, B[$ . On pourra alors considérer  $f(D_u)$ ).

Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , non nécessairement deux à deux distincts.

Soit  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$  tel que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i - \xi}$  est *non nul*. On considère *alors* le nombre complexe  $\delta_\xi$  défini par

$$\frac{1}{\delta_\xi - \xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i - \xi}. \quad (1)$$

- 8) Soit  $\mathcal{C}$  un cercle tel que  $\{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$ . Montrer que si l'origine 0 appartient à  $\mathcal{C}^+$  alors  $\delta_0$  est bien défini et appartient à  $\mathcal{C}^-$  (on pourra commencer par prouver que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(z_i)$  appartient à  $f(\mathcal{C})^-$ ).
- 9) Soit  $\mathcal{C}$  un cercle tel que  $\{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$ . Montrer que si  $\xi \in \mathcal{C}^+$  alors  $\delta_\xi$  est bien défini et appartient à  $\mathcal{C}^-$ .

### C. Condition d'apolarité.

Dans cette partie,  $z_1, \dots, z_n$  désigneront  $n$  nombres complexes non nécessairement deux à deux distincts.

- 10) Soit  $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$  un polynôme de  $\mathbb{C}_n[X]$  et

$$\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Exprimer  $\frac{P'(\xi)}{P(\xi)}$  en fonction des  $\frac{1}{\xi - z_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ). En déduire que si  $P'(\xi)$  est non nul alors

$$\delta_\xi = \xi - n \frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$$

où  $\delta_\xi$  est défini par (1).

- 11) Soit  $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - z_i) \in \mathbb{C}[X]$  et  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

Montrer que l'ensemble des zéros  $\xi \in \mathbb{C}$  de  $A_z P(X)$  est la réunion des deux ensembles suivants :

- $\{z_i, 1 \leq i \leq n, P'(z_i) = 0\}$ .
- $\{\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\}, \delta_\xi = z\}$ , où  $\delta_\xi$  est défini par (1).

- 12) On conserve les notations de la question précédente. Montrer que

$$z = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j$$

si et seulement si le degré de  $A_z P(X)$  est strictement inférieur à  $n - 1$ .

- 13) On considère le polynôme  $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$  et  $z \in \mathbb{C}$ . On suppose

qu'il existe un cercle  $\mathcal{C}_1$  tel que  $\{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathcal{C}_1^-$  et

$z \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1^+$ . Prouver alors que  $A_z P(X)$  est *exactement* de degré  $n - 1$ .

Puis prouver que les  $n - 1$  zéros de  $A_z P(X)$  (en comptant les multiplicités) appartiennent tous à  $\mathcal{C}_1^-$  (on pourra utiliser les questions 9 et 11).

On considère deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ ,

$$P(X) = u \prod_{i=1}^n (X - z_i), \text{ et } Q(X) = v \prod_{i=1}^n (X - z'_i),$$

où  $u, v \in \mathbb{C}^*$  et  $z_i, z'_i$  désignent respectivement les zéros de  $P(X)$  et  $Q(X)$ .

On dira que  $P$  est *apolaire par rapport* à  $Q$  si  $A_{z'_1} A_{z'_2} \cdots A_{z'_n} P(X) = 0$ .

Quand on écrit  $A_{z'_1} A_{z'_2} \cdots A_{z'_n}$  dans cet ordre on utilise la convention décrite dans la question 2. Plus précisément,  $A_{z'_n}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_n[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ ,  $A_{z'_{n-1}}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$  vers  $\mathbb{C}_{n-2}[X]$ ,  $\dots$ ,  $A_{z'_1}$  est vu comme application de  $\mathbb{C}_1[X]$  vers  $\mathbb{C}$ . Ainsi  $A_{z'_1} A_{z'_2} \cdots A_{z'_n} P(X)$  est une constante.

- 14) On suppose que  $P$  est apolaire par rapport à  $Q$ . Montrer que si  $\mathcal{C}$  est un cercle tel que  $\{z_i, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathcal{C}^-$  alors il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $z'_i \in \mathcal{C}^-$  (on utilisera la question précédente).

Dans la suite, on fixe  $a, b$  deux points distincts de  $\mathbb{C}$ .

- 15) Montrer qu'il existe  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$  que l'on calculera, tels que pour tout polynôme du type

$$T(X) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 X + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1},$$

on ait  $\int_0^1 T(a + t(b-a)) dt =$

$$a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0.$$

Avec les notations de la question précédente, on fixe  $n$  un entier supérieur ou égal à deux et on pose

$$\Delta(X) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 X + \dots + \binom{n-1}{n-2} b_{n-2} X^{n-2} + b_{n-1} X^{n-1}.$$

- 16) Montrer que  $\Delta(X) = C_n((X-a)^n - (X-b)^n)$  où  $C_n$  est une constante non nulle que l'on calculera.

Soit  $P(X) \in \mathbb{C}_n[X]$  de degré  $n \geq 2$  tel que  $P(a) = P(b)$ . On écrit

$$P'(X) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 X + \dots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} X^{n-2} + a_{n-1} X^{n-1}.$$

On désigne par  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  les zéros (comptés avec multiplicité) de  $P'(X)$ . On admet que la constante  $(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_{n-1}} \Delta(X)$  est égale à :

$$a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0.$$

- 17) Montrer que  $\Delta(X)$  est apolaire par rapport à  $P'(X)$  (on pourra utiliser la question 15). En déduire alors le **Théorème 1** (on pourra appliquer la question 14).

FIN DU PROBLÈME