

Devoir surveillé n° 7

Concours blanc

du mardi 10 mars 2026

Durée : 4 heures

Toute calculatrice interdite

Instructions générales :

Les candidats sont priés

- de vérifier que le sujet dont ils disposent comporte bien 11 pages ;
- de ne traiter que le sujet qui leur est destiné, selon leur statut d'élève étoilé ou non :
 - ▷ **Sujet 1 pour les non étoilés ;**
 - ▷ **Sujet 2 pour les étoilés.**
- de toujours justifier leurs réponses.

Enfin, les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Rappel des consignes

Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats. Ne pas utiliser de correcteur. Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bon courage !

SUJET 1, uniquement pour les élèves non étoilés

EXERCICE 1

Extrema sur un disque fermé

Question préliminaire

Soit φ la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = 2t^3 - t^2 + 1.$$

Q.1. Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et en donner la représentation graphique dans le plan muni d'un repère.

Soit $f : M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^2 \in \mathbb{R}$.

Q.2. Déterminer les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f .

Q.3. En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $\mathcal{D}$ le disque fermé de centre O et de rayon 2 :

$$\mathcal{D} = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Q.4. Justifier que f admet dans $\mathcal{D}$ des extrema globaux.

Q.5. Justifier que ces extrema sont atteints sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Q.6. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 2 : il existe donc $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$M = (2 \cos(\alpha), 2 \sin(\alpha)).$$

Démontrer que :

$$f(M) = 4\varphi(\cos(\alpha)).$$

Q.7. En déduire les extrema globaux de f sur $\mathcal{D}$.

EXERCICE 2

Fonction de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) \, dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} \, dt.$$

Q.8. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q.9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q.10. Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Justifier l'existence de $\frac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Q.11. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0. \quad (E)$$

Q.12. On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

Q.13. En utilisant un théorème d'interversion série-intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q.14. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant $f(0) = \pi$.

Q.15. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n .

EXERCICE 3

Une matrice de produit scalaire

Soient r un nombre réel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors $A^\top \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de la matrice A .

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique :

$$(X | Y) = X^\top Y.$$

On note enfin J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

Q.16. Déterminer une base de $\text{Im}(J)$ et le rang de la matrice J .

Q.17. Déterminer une base de $\text{Ker}(J)$.

Q.18. Prouver que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.19. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice J et une matrice diagonale D semblable à J .

Q.20. Démontrer que $\text{Im}(J)$ et $\text{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Q.21. Justifier que $M_r \in \text{Vect}(I_n, J)$.

Q.22. Vérifier que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r .

Pour tout couple (X, Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f_r(X, Y) = X^\top M_r Y.$$

Q.23. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $Y \mapsto f_r(X, Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Q.24. Montrer que :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f_r(X, Y) = f_r(Y, X).$$

Q.25. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que :

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f_r(X, Y) = (X')^\top \Delta_r Y'$$

où l'on a posé $X' = PX$ et $Y' = PY$.

On ne déterminera pas la matrice P .

Q.26. Déterminer les valeurs de r pour lesquelles l'application f_r définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 4

Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A .

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- (1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;
- (2) sinon, on pose $T = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geq A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

Q.27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Q.28. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Q.29. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q.30. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ est égal à 1.

Q.31. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q.32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

Q.33. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Q.34. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$.
En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}.$$

Q.35. Calculer $P(T = 0)$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum_{k \geq A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

Q.36. Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum_{k \geq A} P(T = k)x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x} \right)^A.$$

Q.37. En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leq M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P(S_n \leq k)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^k \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Q.38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M - 1))$, montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k P(S_n \leq k - \ell).$$

Q.39. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, A - 1 \rrbracket, \quad P(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}.$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum_{n \geq 0} P(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n).$$

Q.40. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

Fin du sujet 1

Objectifs et notations

Ce problème étudie quelques aspects de l'équation de diffusion (1) : $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$.

Cette équation modélise l'évolution au cours du temps de la température le long d'une barre métallique unidimensionnelle, ou encore l'évolution au cours du temps de la concentration d'une espèce chimique (par exemple un polluant dans une rivière assimilée à l'axe des x).

Le problème est constitué de quatre parties.

- La partie I permet de démontrer quelques résultats sur la transformée de Fourier d'une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Ces résultats sont utilisés dans la partie II.
- La partie II aboutit à la résolution de l'équation (1) lorsqu'on impose à la solution f d'être de classe $\mathcal{C}^2$ et de vérifier certaines conditions.
- La partie III étudie la stabilité du schéma numérique correspondant à la discrétisation de t et de x .
- La partie IV fournit une interprétation probabiliste du paramètre qui détermine la stabilité étudiée dans la partie III.

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et largement indépendantes entre elles.

On désigne par $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour toute fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, pour tout réel $t_0 > 0$, on note $h(t_0, \cdot)$ la fonction partielle $x \mapsto h(t_0, x)$ définie sur $\mathbb{R}$; de même, pour tout réel x_0 , on note $h(\cdot, x_0)$ la fonction partielle $t \mapsto h(t, x_0)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on note $\llbracket a; b \rrbracket$ l'ensemble des entiers k vérifiant $a \leq k \leq b$.

Pour tout réel $\sigma > 0$, g_σ désigne la fonction $g_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{cases}$.

I Préliminaires

Dans cette partie, on fixe un réel strictement positif σ .

I.A Quelques propriétés de g_σ

Q.1. Montrer que g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q.2. En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$, donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx$.

Q.3. Étudier les variations de g_σ . Montrer que la dérivée seconde de g_σ s'annule en changeant de signe en exactement deux points. Donner l'allure de la courbe représentative de g_σ et placer les deux points précédents.

I.B

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q.4. Montrer que, pour tout réel ξ , la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) \end{cases}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\mathcal{F}(f) : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx \end{cases}$.

On dit que $\mathcal{F}(f)$ est la transformée de Fourier de f .

Q.5. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.C

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Q.6. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q.7. Montrer que, pour tout réel ξ , $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi \mathcal{F}(f)(\xi)$.

I.D

Q.8. Montrer que, pour tout entier naturel p , la fonction $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On note $M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2) dx$.

Q.9. Pour p entier naturel, donner une relation entre M_{p+1} et M_p et en déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}.$$

Q.10. Montrer que, pour tout réel ξ , il existe une suite réelle $(c_p(\xi))_{p \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x^2) \cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \exp(-x^2) x^{2p}.$$

Q.11. En déduire que, pour tout réel ξ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i2\pi\xi x) dx = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2\xi^2).$$

Q.12. On pose $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel μ tel que $\mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}$. La valeur de μ n'est pas à expliciter.

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Dans cette partie, σ désigne un réel strictement positif. On cherche les éléments f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

- (i) l'équation de diffusion : $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$;
- (ii) les trois conditions de domination : pour tout réel $T > 0$, il existe des fonctions ϕ_T , χ_T et ψ_T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall t \in]0, T[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} |f(t, x)| \leq \phi_T(x) \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \chi_T(x) \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq \psi_T(x) \end{cases}$$

- (iii) la condition aux limites : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x) = g_\sigma(x)$.

Q.13. Montrer que la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}(x) \end{cases}$ vérifie les conditions (i) et (iii).

On admet que cette fonction vérifie également les trois conditions de domination (ii). L'objectif est de démontrer que c'est la seule fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant (i), (ii) et (iii).

Pour cela, on note f une fonction qui vérifie (i), (ii) et (iii).

II.A

Q.14. Justifier que, pour tout réel $t > 0$ et tout réel ξ , la fonction $x \mapsto f(t, x) \exp(-2i\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On définit alors la fonction $\hat{f}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : $\forall (t, \xi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \hat{f}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \exp(-i2\pi\xi x) dx$.

Avec les notations de la partie I, on a ainsi, pour tout réel $t > 0$, $\hat{f}(t, \cdot) = \mathcal{F}(f(t, \cdot))$.

Q.15. Montrer que, pour tout nombre réel ξ , $\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

On pourra utiliser une suite quelconque $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs convergeant vers zéro.

Q.16. Montrer que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$, $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i2\pi\xi x) dx$.

Q.17. En remarquant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i2\pi\xi x) dx = \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)\right)(\xi)$ et en utilisant **Q.7**, montrer que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$, $\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(t, \xi)$.

II.B

Q.18. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe un réel $K(\xi)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\hat{f}(t, \xi) = K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t)$.

Q.19. En utilisant la question **Q.15**, déterminer, pour tout réel ξ , la valeur de $K(\xi)$.

II.C

Q.20. En déduire l'existence d'un réel ν_σ tel que, pour tout réel ξ et tout réel $t > 0$,

$$\hat{f}(t, \xi) = \nu_\sigma \exp(-2\pi^2(\sigma^2 + 2t)\xi^2).$$

Q.21. Donner la valeur de ν_σ .

On admet le résultat suivant :

si u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$, alors $u = v$.

Q.22. Soit t un réel strictement positif. Déduire des questions **Q.20** et **Q.12** l'existence d'un réel $\lambda_{t,\sigma}$ tel que

$$f(t, \cdot) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}.$$

Q.23. Montrer que la fonction $I : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx \end{cases}$ est constante.

*On pourra utiliser le résultat de **Q.17***

Q.24. En déduire que, pour tout réel t strictement positif, $f(t, \cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}$.

III Étude numérique

Dans cette partie, on étudie, du point de vue numérique, un certain problème de diffusion.

On fixe une fonction f , continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, vérifiant l'équation de diffusion

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$$

ainsi que les conditions aux limites

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t, 0) = f(t, 1) = 0.$$

On suppose connue la fonction $f(0, \cdot)$ et on se propose d'étudier une méthode de calcul numérique de f .

III.A

Q.25. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]0, 1[$. Donner la limite, quand θ tend vers zéro, de $\frac{f(t+\theta, x) - f(t, x)}{\theta}$.

Q.26. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in]0, 1[$. Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$.

III.B

Soit τ un réel strictement positif et q un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $\delta = \frac{1}{q+1}$ et $r = \frac{\tau}{\delta^2}$.

La méthode numérique retenue consiste à discrétiser t selon le pas τ et x selon le pas δ , ce qui amène à chercher une valeur approchée de $f(n\tau, k\delta)$, notée $f_n(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket$.

Compte tenu des questions **Q.25** et **Q.26**, l'équation de diffusion et les conditions aux limites conduisent à imposer,

pour tout entier naturel n et tout $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$, $\frac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\tau} = \frac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$

ainsi que $f_n(0) = f_n(q+1) = 0$ et $f_0(k) = f(0, k\delta)$ (on rappelle que la fonction $f(0, \cdot)$ est supposée connue).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}$.

On note I_q la matrice identité d'ordre q , et on définit la matrice B carrée d'ordre q par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tous i, j dans $\llbracket 1; q \rrbracket$, le coefficient de place (i, j) de B est égal à 1 si $|i - j| = 1$ et à 0 sinon.

Enfin, on pose $A = (1 - 2r)I_q + rB$.

Q.27. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = AF_n$.

Q.28. Justifier que les matrices A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = A^n F_0$.

Q.29. Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée quel que soit le choix de F_0 si et seulement si les valeurs propres de A appartiennent à $[-1, 1]$.

Soit λ une valeur propre de B et soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Q.30. En considérant un coefficient de Y dont la valeur absolue est maximale, montrer que $\lambda \in [-2, 2]$ et justifier l'existence d'un élément θ de $[0, \pi]$, tel que $\lambda = 2 \cos \theta$.

Q.31. Montrer que, si on impose $y_0 = y_{q+1} = 0$, alors, pour tout $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$, $y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0$.

Q.32. En déduire qu'il existe $j \in \llbracket 1; q \rrbracket$ tel que $\lambda = 2 \cos \frac{j\pi}{q+1}$.

Q.33. Déterminer le spectre de B et une base de vecteurs propres de B .

Q.34. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur r pour que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée quels que soient les choix de q et de F_0 .

On dit alors que le schéma numérique retenu est stable.

IV Équation de diffusion et marche aléatoire

Le déplacement d'une particule dans une direction donnée sous l'action des chocs avec les particules voisines peut se modéliser par des déplacements successifs à droite ou à gauche équiprobables, d'une quantité strictement positive δ , qui interviennent à intervalles de temps réguliers, le temps entre deux chocs étant égal à $\tau > 0$.

Une variable aléatoire est dite de Rademacher si elle est à valeurs dans $\{1, -1\}$ et si elle prend les valeurs 1 et -1 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Rademacher mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

Ainsi, la variable aléatoire δS_n modélise la position de la particule au temps $n\tau$.

IV.A

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{1}{2}(X_n + 1)$ et $Z_n = \sum_{j=1}^n Y_j$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q.35. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_n et celle de la variable aléatoire Z_n .

Soit k un entier tel que $-n \leq k \leq n$.

Q.36. Montrer que, si n et k ne sont pas de même parité, alors $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$.

On rappelle que $\binom{n}{j}$ désigne le coefficient binomial « j parmi n ».

Q.37. Montrer que, si n et k sont de même parité, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{(k+n)/2} \frac{1}{2^n}$.

IV.B

Pour x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x .

Q.38. Pour tous réels $\delta > 0$ et $\tau > 0$, calculer $V(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor})$, variance de la variable aléatoire $\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}$.

Q.39. Montrer que, pour tout réel δ , $V(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor})$ est équivalent à $\frac{\delta^2}{\tau}$, lorsque τ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Q.40. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, en posant $p_n(k) = \mathbb{P}(S_n = k)$, montrer que

$$\frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}.$$

Q.41. En déduire une interprétation probabiliste de la condition de stabilité étudiée à la partie III.

Fin du sujet 2