

Préparation aux oraux ENS - Corrigés
Planche n° 1

Soient E un \mathbb{R} -espace préhilbertien réel et C une partie convexe de E . On dit que $u \in C$ est un vecteur extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{u\}$ est encore convexe.

- 1) Montrer qu'un vecteur a de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux vecteurs distincts de C (il n'existe pas de couple (x, y) de C^2 tel que $x \neq y$ et $a = \frac{1}{2}(x + y)$).
- 2) Montrer que si la partie C est ouverte, elle ne possède aucun point extrémal. Que dire si C est fermée ?
- 3) On suppose que C est fermée et bornée et E euclidien.
 - a. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est continue sur E^2 , puis que $\max_{(x, y) \in C^2} \|x - y\|$ existe. On note M ce maximum.
 - b. Soit $(a, b) \in C^2$ tel que $\|a - b\| = M$. Montrer que a et b sont extrémaux.
 - c. Réciproquement, si a est un vecteur extrémal de C , existe-il $b \in C$ tel que $\|a - b\| = M$?

1) Soit $u \in C$. On veut : u est extrémal $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in C^2, x \neq y, \frac{1}{2}(x + y) \neq u$.

(\Rightarrow) On suppose que u est extrémal.

S'il existe $(x, y) \in C^2$ tels que $x \neq y$ et $\frac{1}{2}(x + y) = u$, alors $x \neq u$ et $y \neq u$, donc $x, y \in C \setminus \{u\}$ et $C \setminus \{u\}$ est convexe d'où $\frac{1}{2}(x + y) = u \in C \setminus \{u\}$: absurde.

(\Leftarrow) On suppose : $\forall (x, y) \in C^2, x \neq y, \frac{1}{2}(x + y) \neq u$.

Soient $x, y \in C \setminus \{u\}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in C$.

Supposons qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que $tx + (1 - t)y = u$. Quitte à échanger x et y , on peut supposer que $t \geq \frac{1}{2}$ (u est « plus proche » de x). Soit $z = t'x + (1 - t')y$ avec $t' = 2t - 1 \in [0, 1]$.

On a $z \in C$ et $\frac{1}{2}(x + z) = \frac{1}{2}[x + (2t - 1)x + (1 - 2t + 1)y] = tx + (1 - t)y = u$: absurde.

2) Soit $x \in C$, partie ouverte. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset C$ mais alors si u est un vecteur unitaire, $x - \frac{r}{2}u, x + \frac{r}{2}u \in C$ et $x = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{r}{2}u\right) + \left(x + \frac{r}{2}u\right)\right]$, donc x n'est pas extrémal.

Si C est fermée, C peut être :

- une droite, convexe, fermée et dont tous les vecteurs sont milieu de deux vecteurs de la droite ;

- un segment fermé, dont les extrémités sont extrémales.

Donc, si C est fermée, on ne peut pas conclure.

3) a. $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ et la composée de $(x, y) \mapsto x - y$ et $u \mapsto \|u\|$ toutes deux continues donc est continue sur E^2 . Comme C est fermée et bornée, C^2 aussi et comme E euclidien, E^2 peut être normé et est de dimension finie, donc le théorème des bornes atteintes permet de conclure que l'application continue $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ admet un maximum sur C^2 , donc $\max_{(x,y) \in C^2} \|x - y\|$ existe.

b. Soit $(a, b) \in C^2$ tel que $\|a - b\| = M$. Supposons que a n'est pas extrémal.

Alors, il existe $(a_1, a_2) \in C^2$ tel que $a_1 \neq a_2$ et $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ et :

$$M = \|a - b\| = \left\| \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - b \right\| = \frac{1}{2} \|(a_1 - b) + (a_2 - b)\| \leq \frac{1}{2} (\|a_1 - b\| + \|a_2 - b\|) \leq \frac{1}{2} (M + M) = M$$

Donc, $M = \frac{1}{2} \|(a_1 - b) + (a_2 - b)\| = \frac{1}{2} (\|a_1 - b\| + \|a_2 - b\|)$ et on a un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, donc $a_1 - b$ et $a_2 - b$ sont colinéaires de même sens. De plus :

$$\left. \begin{array}{l} \|a_1 - b\| + \|a_2 - b\| = 2M \\ \|a_1 - b\| \leq M \\ \|a_2 - b\| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \|a_1 - b\| = \|a_2 - b\| = M.$$

Donc, $a_1 - b = a_2 - b$, soit $a_1 = a_2$: absurde. Ainsi, a est extrémal.

c. Non, si C est l'intérieur d'un losange (bord inclus).

Planche n° 2

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

1) On suppose que $S_n \sim \frac{1}{a_n}$.

a. Montrer que la série $\sum a_n$ diverge, mais pas grossièrement.

b. Prouver que $S_{n+1} \sim S_n$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1}^2 - S_n^2) = 2$.

c. En déduire que $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

2) Réciproquement, montrer que si $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$, alors $S_n \sim \frac{1}{a_n}$.

1) a. Si la série $\sum a_n$ converge, alors $S_n \rightarrow S > 0$ et donc $a_n \rightarrow \frac{1}{S} \neq 0$, ainsi la série $\sum a_n$ diverge grossièrement : absurde. Donc, $\boxed{\sum a_n \text{ diverge}}$.

Comme pour tout n , $a_n > 0$ et $\sum a_n$ diverge, $S_n \rightarrow +\infty$, donc $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$ et ainsi, $\boxed{a_n \rightarrow 0}$.

b. On a pour tout n , $S_n > 0$ et $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{a_{n+1}}{S_n} \rightarrow 1$, donc $\boxed{S_{n+1} \sim S_n}$.

$S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n) = a_{n+1}(S_{n+1} + S_n) \sim \frac{1}{S_{n+1}}(2S_{n+1}) = 2$, donc $\boxed{S_{n+1}^2 - S_n^2 \rightarrow 2}$.

c. Césaro : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (S_{k+1}^2 - S_k^2) = 2$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (S_n^2 - S_0^2) = 2$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n^2}{n} = 2$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \quad (\text{car } S_n > 0) \Leftrightarrow S_n \sim \sqrt{2n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \sim \sqrt{2n} \Leftrightarrow \boxed{a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}}.$$

2) On suppose $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Alors, $\sum a_n$ diverge, donc $S_n \sim \sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{2k}}$ (à prouver) et par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} \sim \sqrt{2n} \sim \frac{1}{a_n}, \text{ donc } \boxed{S_n \sim \frac{1}{a_n}}.$$

Planche n° 3

Des variables aléatoires indépendantes U_i , $i \in \mathbb{N}^*$, suivent toute une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Z est une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{N} suivant une loi quelconque.

On pose $X = Y = 0$ pour $Z = 0$, et $X = \sum_{i=1}^Z U_i$ et $Y = Z - X = \sum_{i=1}^Z (1 - U_i)$ pour $Z \geq 1$.

Montrer que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k, Y = \ell) = \binom{k + \ell}{k} p^k (1 - p)^\ell r_{k+\ell}$ où $r_i = P(Z = i)$.

Exprimer $p_k = P(X = k)$ et $q_k = P(Y = k)$ à l'aide de p et de la suite (r_n) .

Montrer que si Z suit une loi de Poisson, X et Y sont indépendantes.

On suppose X et Y indépendantes et Z non presque sûrement nulle.

Montrer que $r_n = \sum_{k+\ell=n} p_k q_\ell$, puis que p_0, q_0, p_1, q_1 sont strictement positifs.

Montrer que $p_{k+1} q_\ell (k+1)(1-p) = p_k q_{\ell+1} (\ell+1)p$ et en déduire une relation de récurrence vérifiée par (q_n) , puis q_n en fonction de p_0, p_1 et p .

Montrer que Z suit une loi de Poisson.

Remarquons déjà que à $Z = n \in \mathbb{N}^*$, X suit une loi binomiale de paramètres n et p , soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_{(Z=n)}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et si $k > n$, $P_{(Z=n)}(X = k) = 0$.

On a alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(X = k, Y = \ell) = P(X = k, Z = k + \ell) = P(Z = k + \ell)P_{(Z=k+\ell)}(X = k) = r_{k+\ell} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi des probabilités totales donne :

$$p_k = P(X = k) = \sum_{n \geq 0} P(Z = n)P_{(Z=n)}(X = k) = \sum_{n \geq k} r_n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$q_k = P(Y = k) = \sum_{n \geq 0} P(Z = n)P_{(Z=n)}(Y = k) = \sum_{n \geq k} P(Z = n)P_{(Z=n)}(X = n - k) = \sum_{n \geq k} r_n \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$$

On a $P(Z = n) = r_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$, donc :

$$p_k = \sum_{n \geq k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} p^k \sum_{n \geq k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} p^k e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$

Et de même $q_k = e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!}$. On a alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(X = k, Y = \ell) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell = e^{-(p+1-p)\lambda} \frac{(p\lambda)^k ((1-p)\lambda)^\ell}{k! \ell!} = P(X = k)P(Y = \ell).$$

Donc, X et Y sont indépendantes.

On a $Z = X + Y$ et X et Y indépendantes, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ (même 0) :

$$r_n = P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} = \sum_{k+\ell=n} p_k q_\ell.$$

On a $p_0 = \sum_{n \geq 0} r_n (1-p)^n$ et dans cette somme tous les termes sont positifs et non tous nuls, donc $p_0 > 0$. De même $q_0 > 0$.

On a $p_1 = \sum_{n \geq 1} r_n n p (1-p)^{n-1} \geq 0$. Si $p_1 = 0$ alors $r_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (car $n p (1-p)^{n-1} > 0$), donc $r_0 = P(Z = 0) = 1$ et Z est presque sûrement nulle, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $p_1 > 0$ et de même $q_1 > 0$.

On a vu que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k, Y = \ell) = r_{k+\ell} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell$ et comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
p_{k+1}q_\ell(k+1)(1-p) &= P(X = k+1)P(Y = \ell)(k+1)(1-p) = P(X = k+1, Y = \ell)(k+1)(1-p) \\
&= r_{k+1+\ell} \binom{k+1+\ell}{k+1} p^{k+1} (1-p)^\ell (k+1)(1-p) = r_{k+\ell+1} \binom{k+\ell+1}{\ell+1} p^k (1-p)^{\ell+1} (\ell+1)p \\
&= P(X = k, Y = \ell+1)(\ell+1)p \\
&= p_k q_{\ell+1} (\ell+1)p
\end{aligned}$$

Alors, avec $k = 0$, on obtient pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$p_1 q_\ell (1-p) = p_0 q_{\ell+1} (\ell+1)p \Leftrightarrow q_{\ell+1} = \frac{p_1(1-p)}{p_0 p} \frac{1}{\ell+1} q_\ell.$$

Une récurrence simple montre que comme $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ et $q_0 > 0$, on a $q_\ell > 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et ainsi, on peut écrire pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{i=0}^{\ell-1} \frac{q_{i+1}}{q_i} = \prod_{i=0}^{\ell-1} \left(\frac{p_1(1-p)}{p_0 p} \frac{1}{i+1} \right) \Leftrightarrow q_\ell = q_0 \frac{\alpha^\ell}{\ell!} \quad \text{avec } \alpha = \frac{p_1(1-p)}{p_0 p}.$$

Et $\sum_{\ell \geq 0} q_\ell = q_0 \sum_{\ell \geq 0} \frac{\alpha^\ell}{\ell!} = q_0 e^\alpha = 1$, donc $q_0 = e^{-\alpha}$, donc $q_\ell = e^{-\alpha} \frac{\alpha^\ell}{\ell!}$ et Y suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha = \frac{p_1}{p_0} \left(\frac{1}{p} - 1 \right)$. On prouve de même que X suit une loi de Poisson de paramètre $\beta = \frac{p_1}{p_0}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} = \sum_{k=0}^n e^{-\beta} \frac{\beta^k}{k!} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \beta^k \alpha^{n-k} = e^{-(\alpha+\beta)} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}.$$

Ainsi, Z suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta = \frac{p_1}{p_0 p}$.

Planche n° 4

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout $t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$:

$$P_n(\tan^2 t) = \frac{\cos((2n+1)t)}{\cos^{2n+1} t}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les racines de P_n et montrer que leur somme vaut $\frac{n(2n-1)}{3}$.

Montrer que pour tout $t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan^2 t \leq \left(\frac{\pi}{2} - t \right)^{-2} \leq 1 + \tan^2 t$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Avec $\cos((2n+1)t) = \operatorname{Re}[(\cos t + i \sin t)^{2n+1}]$, on obtient $P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k} X^k$.

On a $\deg P_n = n$, donc P_n a au plus n racines distinctes. Or :

$$P_n(\tan^2 t) = 0 \Leftrightarrow \cos((2n+1)t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}, k \in \mathbb{Z}.$$

Et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $0 < \frac{\pi}{2(2n+1)} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \leq \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)} < \frac{\pi}{2}$ donc les réels $\tan^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)$, $\tan^2\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}\right), \dots, \tan^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}\right)$ sont distincts deux à deux et racines de P_n .

Ainsi, les racines de P_n sont les $\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (n racines simples).

On a $P_n = (-1)^n(2n+1)X^n + (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)n(2n-1)}{3} X^{n-1} + \dots$ donc la somme des racines de P_n est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right) = -\frac{(-1)^{n-1} \frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Si on pose $f(t) = \frac{1}{\tan t} - \frac{\pi}{2} + t$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $f \searrow$ de $\lim_{0^+} f = +\infty$ à $\lim_{(\pi/2)^-} f = 0$, donc $f \geq 0$ et comme $\tan t > 0$ et $\frac{\pi}{2} - t > 0$, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\tan^2 t \leq \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{-2}.$$

Si on pose $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} - \frac{\pi}{2} + t$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $g \nearrow$ de $\lim_{0^+} g = -\frac{\pi}{2}$ à $\lim_{(\pi/2)^-} g = 0$, donc $g \leq 0$, ce qui donne pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{-2} \leq 1 + \tan^2 t.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on $\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right) \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)^{-2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{(2n+1)^2}{(n-k)^2} \leq 1 + \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right).$$

Alors, $\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi^2} \frac{(2n+1)^2}{(n-k)^2} \leq n + \sum_{k=0}^{n-1} \tan^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}\right)$, soit :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3} \Leftrightarrow \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \pi^2 \frac{n(2n+2)}{3(2n+1)^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^2 \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi^2 \frac{n(2n+2)}{3(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Planche n° 5

I) Soient deux réels $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles discrètes, mutuellement indépendantes et prenant leurs valeurs dans $[a, b]$. Si S est leur somme, on veut montrer que pour tout $t > 0$, $P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-2t^2/n(b-a)^2}$.

Montrer que si une fonction ϕ est continue de $[c, d]$ dans \mathbb{R} , nulle en c et d , de classe C^2 sur $]c, d[$, de dérivée seconde strictement positive, alors ϕ est négative ou nulle.

Soit $s > 0$. Montrer, à l'aide du résultat précédent, que pour tout $y \in [c, d]$:

$$e^{sy} \leq \frac{c-y}{c-d} e^{sd} + \frac{y-d}{c-d} e^{sc}.$$

Soit une variable aléatoire discrète Y d'espérance nulle et prenant ses valeurs dans $[c, d]$.

Montrer que $\ln(E(e^{sY})) \leq \ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} + \frac{-d}{c-d} e^{sc}\right)$, puis que $E(e^{sY}) \leq e^{s^2(d-c)^2/8}$.

On admettra que $\ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} + \frac{-d}{c-d} e^{sc}\right) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}$.

Montrer que $P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-st} \prod_{i=1}^n E(e^{s(X_i - E(X_i))})$.

En choisissant bien les Y , montrer que $P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-st + ns^2(b-a)^2/8}$.

Déterminer le minimum du majorant ci-dessus et conclure.

II) Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que $B = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

III) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

I) Sur $]c, d[$, ϕ'' est strictement positive, donc ϕ' est strictement croissante.

De plus, ϕ est continue de $[c, d]$, dérivable sur $]c, d[$ et $\phi(c) = \phi(d) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $e \in]c, d[$ tel que $\phi'(e) = 0$.

Alors, ϕ' est strictement négative sur $]c, e[$ et strictement positive sur $]e, d[$ et :

- ϕ est strictement décroissante sur $[c, e]$ et $\phi(c) = 0$, donc ϕ est négative sur $[c, e]$;
- ϕ est strictement croissante sur $[e, d]$ et $\phi(d) = 0$, donc ϕ est négative sur $[e, d]$.

Finalement, ϕ est négative sur $[c, d]$.

$$\text{Posons } \phi(y) = e^{sy} - \frac{c-y}{c-d} e^{sd} - \frac{y-d}{c-d} e^{sc}.$$

La fonction ϕ est de classe C^2 sur $[c, d]$, $\phi(c) = \phi(d) = 0$ et $\phi''(y) = s^2 e^{sy} > 0$, donc ϕ est négative sur $[c, d]$, soit : pour tout $y \in [c, d]$, $e^{sy} \leq \frac{c-y}{c-d} e^{sd} + \frac{y-d}{c-d} e^{sc}$.

Si $Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [c, d]$ donc :

$$\sum_{k=0}^n P(Y = y_k) e^{sy_k} \leq \sum_{k=0}^n P(Y = y_k) \left(\frac{c-y_k}{c-d} e^{sd} + \frac{y_k-d}{c-d} e^{sc} \right).$$

Et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(Y = y_k) \left(\frac{c-y_k}{c-d} e^{sd} + \frac{y_k-d}{c-d} e^{sc} \right) &= \frac{1}{c-d} e^{sd} \left[c \sum_{k=0}^n P(Y = y_k) - \sum_{k=0}^n P(Y = y_k) y_k \right] \\ &\quad + \frac{1}{c-d} e^{sc} \left[\sum_{k=0}^n P(Y = y_k) y_k - d \sum_{k=0}^n P(Y = y_k) \right] \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = y_k) = 1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = y_k) y_k = E(Y) = 0$, la série ci-dessus converge (de somme $\frac{c}{c-d} e^{sd} + \frac{-d}{c-d} e^{sc}$) et ainsi, e^{sY} admet une espérance finie et par le théorème du transfert, on a :

$$E(e^{sY}) = \sum_{n \geq 0} P(Y = y_n) e^{sy_n} \leq \frac{c}{c-d} e^{sd} + \frac{-d}{c-d} e^{sc} \Rightarrow \ln(E(e^{sY})) \leq \ln\left(\frac{c}{c-d} e^{sd} + \frac{-d}{c-d} e^{sc}\right).$$

Avec le résultat admis, on obtient immédiatement :

$$\ln(E(e^{sY})) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8} \Rightarrow E(e^{sY}) \leq e^{s^2(d-c)^2/8}.$$

On a $P(S - E(S) \geq t) = P(e^{s(S-E(S))} \geq e^{st})$ et comme $e^{s(S-E(S))}$ est positive (et admet une espérance d'après ce qui précède car $S - E(S)$ est d'espérance nulle), on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$P(S - E(S) \geq t) = P\left(e^{s(S-E(S))} \geq e^{st}\right) \leq \frac{E(e^{s(S-E(S))})}{e^{st}}.$$

Comme les X_i sont mutuellement indépendantes, les $e^{s(X_i - E(X_i))}$ le sont aussi donc :

$$\frac{E(e^{s(S-E(S))})}{e^{st}} = e^{-st} E \left[\exp \left(\sum_{i=1}^n s(X_i - E(X_i)) \right) \right] = e^{-st} E \left(\prod_{i=1}^n e^{s(X_i - E(X_i))} \right) \stackrel{\substack{\text{mut.} \\ \text{indép.}}}{=} e^{-st} \prod_{i=1}^n E(e^{s(X_i - E(X_i))}).$$

Ainsi, on a bien :

$$P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-st} \prod_{i=1}^n E(e^{s(X_i - E(X_i))}).$$

En prenant $Y = X_i - E(X_i)$, on a $E(Y) = 0$ et $Y(\Omega) \subset [c, d] = [a - E(X_i), b - E(X_i)]$, donc $0 \leq E(e^{sY}) \leq e^{s^2(d-c)^2/8}$, soit $0 \leq E(e^{s(X_i - E(X_i))}) \leq e^{s^2(b-a)^2/8}$.

Ceci étant vrai pour tout i entre 1 et n , on obtient pour tous $t > 0$ et $s > 0$:

$$P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-st} \prod_{i=1}^n e^{s^2(b-a)^2/8} = e^{-st + ns^2(b-a)^2/8}.$$

Le minimum de $s \mapsto ns^2 \frac{(b-a)^2}{8} - st$ est atteint en $s = \frac{4}{n(b-a)^2} t > 0$ et vaut $-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}$.

Comme l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $s > 0$, elle l'est pour $s = \frac{4}{n(b-a)^2} t > 0$ et ainsi, pour tout $t > 0$:

$$P(S - E(S) \geq t) \leq e^{-2t^2/n(b-a)^2}.$$

II) Remarquons déjà que $\chi_B = \chi_A^2$, donc $Sp(B) = Sp(A)$.

Soit $\lambda \in Sp(A)$, E_λ le sous-espace propre de A associé à λ et F_λ le sous-espace propre de B associé à λ . Remarquons que si $Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $X, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $BY = \begin{pmatrix} AX \\ AX' \end{pmatrix}$ donc Y est un vecteur propre de B si et seulement si X et X' sont des vecteurs propres de A associés à la même valeur propre. Ceci permet de prouver facilement que si (X_1, \dots, X_p) est une base de E_λ , alors

$\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ X_n \end{pmatrix} \right)$ est une base de F_λ , et donc que $\dim F_\lambda = 2 \dim E_\lambda$.

Alors, $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim F_\lambda = 2 \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda$ et donc :

$$A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda = n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim F_\lambda = 2n \Leftrightarrow B \text{ diagonalisable}.$$

III) S'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors si $\lambda \in Sp(B)$, on a $\lambda^2 \in Sp(B^2)$,

donc $\lambda^2 = \pm 1$. Or, χ_B est un polynôme réel de degré 3, donc admet une racine réelle a et $a^2 = 1$,

donc $a = \pm 1$. Quitte à changer B en $-B$ (de même carré), supposons que $a = 1$.

Si $-a$ est aussi racine de χ_B , alors la valeur propre 1 de B^2 serait d'ordre au moins 2, ce qui n'est pas. Donc, -1 n'est pas racine de χ_B . De plus, si χ_B admet une autre racine réelle b , alors $b^2 \neq 1$, donc $b^2 = -1$, ce qui est absurde. Ainsi, la seule racine réelle de χ_B est 1.

Si χ_B admet plus d'une racine réelle (comptée avec multiplicité), alors $\chi_B = (X-1)^3$.

Si χ_B admet une racine complexe, son conjugué est aussi racine de χ_B et son carré vaut -1 , donc les racines complexes de χ_B sont i et $-i$, et $\chi_B = (X-1)(X^2+1)$.

Plaçons-nous dans ce dernier cas. On a alors $\mathbb{R}^3 = \ker(B-I_3) \oplus \ker(B^2+I_3)$ et comme $B-I_3$ et B^2+I_3 commutent avec B , $\ker(B-I_3)$ et $\ker(B^2+I_3)$ sont stables par B . Ainsi, B est semblable à

une matrice de la forme $C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(X-a)(X-d)-bc = X^2+1$, soit $\begin{cases} a+d=0 \\ ad-bc=1 \end{cases}$, ou

encore $\begin{cases} d=-a \\ a^2+bc=-1 \end{cases}$. On a alors $C^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) & 0 \\ c(a+d) & d^2+bc & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on prend $\begin{cases} a=b=1 \\ c=-2 \\ d=-1 \end{cases}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = y = z = 0$.

Planche n° 6

Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} |x-a|^{n+1}.$$

Montrer que si f est de classe C^2 sur \mathbb{R} , bornée ainsi que f'' , alors f' est aussi bornée.

Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, $|hf'(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \frac{h^2}{2} \|f''\|_{\infty}$, puis que :

$$\|f'\|_{\infty} \leq \sqrt{2\|f\|_{\infty}\|f''\|_{\infty}}.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$f(b) - f(a) - \frac{1}{2} \|f''\|_{\infty} |b-a|^2 \leq f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) + \frac{1}{2} \|f''\|_{\infty} |b-a|^2.$$

Si $a = x \in \mathbb{R}$ et $b = x + \frac{h}{2}$, puis $b = x - \frac{h}{2}$ avec $h \in \mathbb{R}^*$, on obtient :

$$f(x+h) - f(x) - \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2} \leq f'(x)h \leq f(x+h) - f(x) + \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2} \quad (1)$$

$$f(x-h) - f(x) - \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2} \leq -f'(x)h \leq f(x-h) - f(x) + \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2} \quad (2)$$

En multipliant (2) par -1 puis en additionnant avec (1), on obtient :

$$f(x+h) - f(x-h) - \|f''\|_{\infty} h^2 \leq 2f'(x)h \leq f(x+h) - f(x-h) + \|f''\|_{\infty} h^2.$$

Donc $|2f'(x)h - [f(x+h) - f(x-h)]| \leq \|f''\|_{\infty} h^2$ et :

$$|2f'(x)h| \leq |2f'(x)h - [f(x+h) - f(x-h)]| + |f(x+h) - f(x-h)| \leq \|f''\|_{\infty} h^2 + 2\|f'\|_{\infty}.$$

Ce qui donne, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$:

$$|f'(x)h| \leq \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2}.$$

Ceci prouve que f' est bornée et on a $\|hf'\|_{\infty} = |h|\|f'\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2}$, inégalité qui reste vraie pour $h=0$. Enfin comme $h\|f'\|_{\infty} \leq |h|\|f'\|_{\infty}$, on obtient pour tout $h \in \mathbb{R}$, $h\|f'\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty} \frac{h^2}{2}$, soit :

$$\frac{\|f''\|_{\infty}}{2} h^2 - \|f'\|_{\infty} h + \|f'\|_{\infty} \geq 0.$$

Or, si un trinôme est toujours positif, son discriminant est nul, donc $\|f''\|_{\infty}^2 - 4 \frac{\|f''\|_{\infty}}{2} \|f'\|_{\infty} \leq 0$, soit :

$$\|f''\|_{\infty} \leq \sqrt{2\|f''\|_{\infty}\|f'\|_{\infty}}.$$

Planche n° 7

I) Montrer que ϕ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi(P)(X) = P(-X)$ est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

II) Soient E un espace de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E de matrices A et B dans une base \mathcal{B} de E .

Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

On suppose f et g bijectives. Si λ est une valeur propre de AB , on note E_{λ} le sous-espace propre associé et F_{λ} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de BA . Montrer que $g(E_{\lambda}) \subset F_{\lambda}$ et que $f(F_{\lambda}) \subset E_{\lambda}$. En déduire que E_{λ} et F_{λ} ont même dimension.

Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable $g \circ f$ l'est aussi.

Trouver deux matrices X et Y telles que XY soit diagonalisable mais pas YX .

III) Calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$ et montrer que $\int_0^1 \ln(1-x) \ln x dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

I) Ultra classique : ϕ est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace des polynômes pairs (d'orthogonal le sous-espace des polynômes impairs).

II) Ultra classique aussi, mais plus subtil.

Si B est inversible :

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det((XB^{-1} - A)B) = \det(B(XB^{-1} - A)) = \det(XI_n - BA) = \chi_{BA}.$$

Si B n'est pas inversible, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $B = PJQ$ avec $J = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, contenant $\text{rg}(B)$ fois 1 sur la diagonale. Soient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$J_k = \text{diag}\left(1, \dots, 1, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)$ et $B_k = PJ_kQ$, inversible. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \chi_{AB_k} = \chi_{B_kA} \Rightarrow \chi_{AB} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{AB_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{B_kA} = \chi_{BA}.$$

Soit $X \in E_\lambda$, on a $ABX = \lambda X$, donc :

$$B(ABX) = BA(BX) = \lambda(BX) \Rightarrow g(X) = BX \in F_\lambda.$$

Ainsi, $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. De même, $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

On a alors $\dim g(E_\lambda) \leq \dim F_\lambda$ et $\dim f(F_\lambda) \leq \dim E_\lambda$?

Comme f et g sont bijectives, $\dim E_\lambda = \dim g(E_\lambda)$ et $\dim F_\lambda = \dim f(F_\lambda)$, donc :

$$\dim E_\lambda \leq \dim F_\lambda \text{ et } \dim F_\lambda \leq \dim E_\lambda \Rightarrow \dim E_\lambda = \dim F_\lambda.$$

Comme $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, on a $Sp(AB) = Sp(BA)$ et :

$$AB \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(AB)} \dim E_\lambda = n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(BA)} \dim F_\lambda = n \Leftrightarrow BA \text{ diagonalisable}.$$

Avec $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable et $YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale.

III) $\int_0^1 x^n \ln x dx$ est impropre en 0. Or, $x \mapsto \ln x$ est intégrable en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ quand $n > 0$,

donc $x \mapsto x^n \ln x$ est prolongeable par continuité donc intégrable en 0.

De plus, pour tout $a \in]0, 1]$:

$$\int_a^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln a - \int_a^1 \frac{1}{n+1} x^n \, dx = -\frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln a - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} a^{n+1}.$$

Et avec $a \rightarrow 0$, on obtient $\int_0^1 x^n \ln x \, dx = \frac{-1}{(n+1)^2}$.

On a :

- $\left. \begin{array}{l} \ln(1-x) \ln x \underset{0}{\sim} -x \ln x \\ \ln(1-x) \ln x \underset{h=1-x}{=} \ln h \ln(1-h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h \ln h \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^1 \ln(1-x) \ln x \, dx \text{ converge.}$
- $\frac{1}{n(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^3} \Rightarrow \sum \frac{1}{n(n+1)^2} \text{ converge.}$

Posons pour tout $n \geq 1$, $f(0) = f(1) = f_n(0) = f_n(1) = 0$ et $f_n(x) = \frac{-x^n \ln x}{n}$

On a pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \ln(1-x) \ln x = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

Les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{en^2}$, donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$, on peut intervertir somme et intégrale :

$$\int_0^1 \ln(1-x) \ln x \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n \geq 1} f_n(x) \right) dx = \sum_{n \geq 1} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{-1}{n} \int_0^1 x^n \ln x \, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Planche n° 8

Montrer que le commutant $C(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est une sous-algèbre.

Montrer que si M inversible appartient à $C(A)$, son inverse aussi.

Trouver le commutant de D matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous distincts et montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.

Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ont un commutant de dimension 4 ?

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim C(A) \geq 2$.

On suppose que $\dim C(A) \geq 3$. Montrer que $A = \lambda I_2$ (on pourra utiliser $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $\text{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$).

Donner une base de $C(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Le commutant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Montrer que c'est une sous-algèbre revient à montrer que c'est un sous-espace stable par produit.

L'aspect sous-espace est simple et si $M, N \in C(A)$, alors $AMN = MAN = MNA$, donc $MN \in C(A)$.

Si $M \in C(A) \cap GL_n(\mathbb{R})$, alors :

$$AM = MA \Leftrightarrow M^{-1}AMM^{-1} = M^{-1}MAM^{-1} \Leftrightarrow M^{-1}A = AM^{-1} \Leftrightarrow M^{-1} \in C(A).$$

Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ quand $i \neq j$ et $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $MD = (\lambda_j a_{i,j})$ et $DM = (\lambda_i a_{i,j})$, donc $MD = DM$ si et seulement si $(\lambda_j - \lambda_i)a_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $a_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$. Autrement dit, $M \in C(D)$ si et seulement si M est diagonale. Ainsi, $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

On a alors $\dim C(D) = n$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, D^k est diagonale, donc $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une famille de n matrices de $C(D)$. Reste à voir qu'elle est libre. Si $a_0 I_n + a_1 D + \dots + a_{n-1} D^{n-1} = 0_n$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\lambda_i) = 0$ avec $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, le polynôme P qui est de degré au plus $n-1$ admet n racines distinctes, donc P est nul, soit $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ et ainsi, la famille $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est libre, donc est bien une base de $C(D)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim C(A) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc

A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En particulier :

- $AE_{1,1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1}A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = 0$;
- puis, $AE_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = d$.

Donc, $A = aI_2$. Réciproquement, toute matrice d'homothétie commute avec toutes les matrices, donc $\dim C(A) = 4$ si et seulement si $A = aI_2$.

Remarquons que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \in C(A)$ et $I_2 \in C(A)$.

Si $A = aI_2$, alors $\dim C(A) = 4 \geq 2$ et sinon, $\text{Vect}(I_2, A) \subset C(A)$ et $\dim(\text{Vect}(I_2, A)) = 2$, donc $\dim C(A) \geq 2$.

On suppose que $\dim C(A) \geq 3$. On a alors :

$$\dim(C(A) + \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})) = \dim C(A) + \dim(\text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})) - \dim(C(A) \cap \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})) \leq 4$$

Donc, $\dim(C(A) \cap \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})) \geq \dim C(A) + \dim(\text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})) - 4 \geq 3 + 2 - 4 = 1$. Ainsi, il

existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\alpha E_{1,1} + \beta E_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C(A)$, soit avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha a & \beta a \\ \alpha c & \beta c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha c = \beta c = 0.$$

Si $c \neq 0$, alors $\alpha c = \beta c = 0$ donne $\alpha = \beta = 0$, ce qui est faux, donc $c = 0$.

Avec $\text{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$, on obtient de même $b = 0$.

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale. Or, on a vu que si $a \neq d$, $\dim C(A) = 2 < 3$, ce qui est absurde, donc $a = d$ et ainsi, $A = \lambda I_2$ (avec $\lambda = a = d$).

On vient de voir que quelle que soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\dim C(A) \geq 2$ et $\dim C(A) \geq 3$ si et seulement si $A = \lambda I_2$ et, dans ce cas, $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a vu aussi que $\text{Vect}(I_2, A) \subset C(A)$.

Ainsi :

- si (I_2, A) est liée, une base de $C(A)$ est $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$;
- si (I_2, A) est libre, une base de $C(A)$ est (I_2, A) .

Planche n° 9

Une suite de variables aléatoires (X_n) d'un espace probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) prend ses valeurs dans

$\left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ et vérifie pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \alpha_n (e^{k/n} - 1)$$

avec $\alpha_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{k/n} - 1)\right)^{-1}$ (pour $n \geq 2$).

Trouver un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.

Pour $n \geq 2$, on note F_n la fonction de répartition de X_n . Calculer $F_n(x)$ pour tout réel x .

Montrer que (F_n) converge simplement vers f , continue sur \mathbb{R} , dont on donnera l'expression.

Montrer que (F_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

On a :

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sum_{k=0}^{n-1} ((e^{1/n})^k - 1) = \frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{1/n} - 1} - n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e-1}{n(e^{1/n} - 1)} - 1 \right) = e - 2.$$

Donc, $\alpha_n \sim \frac{1}{n(e-2)}$.

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ \alpha_n \sum_{i=0}^{k-1} (e^{i/n} - 1) & \text{pour } \frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n} \text{ avec } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ 1 & \text{pour } x \geq \frac{n-1}{n} \end{cases}$$

Et $\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}$ se réécrit $k \leq nx+1 < k+1$, donc $k = E(nx)+1$. Alors :

$$\alpha_n \sum_{i=0}^{k-1} (e^{i/n} - 1) = \frac{e^{k/n} - 1}{e^{1/n} - 1} - k = \frac{e^{k/n} - 1 - k(e^{1/n} - 1)}{e^{1/n} - 1 - n}$$

Et ainsi :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ \frac{e^{\frac{E(nx)+1}{n}} - 1 - (E(nx)+1)(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{e - 1 - n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(nx)+1}{n} = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ \frac{e^x - 1 - x}{e - 2} & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, donc f est continue sur \mathbb{R} .

On a $F_n(x) - f(x) = 0$ quand $x \notin [0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$F_n(x) - f(x) = \frac{e^{\frac{E(nx)+1}{n}} - 1 - (E(nx)+1)(e^{\frac{1}{n}} - 1)}{e - 1 - n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} - \frac{e^x - 1 - x}{e - 2}$$

En posant $u_n = \frac{e-2}{e-1-n(e^{\frac{1}{n}}-1)} - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $v_n = \frac{e-2}{e-1-n(e^{\frac{1}{n}}-1)} n(e^{\frac{1}{n}}-1) - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$:

$$\begin{aligned}
F_n(x) - f(x) &= \frac{1}{e-2} \left[(1+u_n)e^{\frac{E(nx)+1}{n}} - e^x + x - (1+v_n)\frac{E(nx)+1}{n} - u_n \right] \\
&= \frac{1}{e-2} \left[u_n e^{\frac{E(nx)+1}{n}} + e^x (e^{\frac{E(nx)+1}{n}-x} - 1) - \left(\frac{E(nx)+1}{n} - x \right) - v_n \frac{E(nx)+1}{n} - u_n \right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$|F_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{e-2} \left[\left| u_n e^{\frac{E(nx)+1}{n}} \right| + \left| e^x (e^{\frac{E(nx)+1}{n}-x} - 1) \right| + \left| \frac{E(nx)+1}{n} - x \right| + \left| v_n \frac{E(nx)+1}{n} \right| + |u_n| \right].$$

On a $0 \leq x < \frac{E(nx)+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$, donc $0 < \frac{E(nx)+1}{n} - x \leq \frac{1}{n}$ et ainsi :

$$\left. \begin{aligned}
\left| u_n e^{\frac{E(nx)+1}{n}} \right| &\leq |u_n| e^{1+\frac{1}{n}} \\
\left| e^x (e^{\frac{E(nx)+1}{n}-x} - 1) \right| &\leq e(e^{\frac{1}{n}} - 1) \\
\left| \frac{E(nx)+1}{n} - x \right| &\leq \frac{1}{n} \\
\left| v_n \frac{E(nx)+1}{n} \right| &\leq |v_n| \left(1 + \frac{1}{n} \right)
\end{aligned} \right\} \Rightarrow |F_n(x) - f(x)| \leq w_n.$$

$$\text{avec } w_n = \frac{1}{e-2} \left[|u_n| e^{1+\frac{1}{n}} + e(e^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{1}{n} + |v_n| \left(1 + \frac{1}{n} \right) + |u_n| \right].$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, on en conclut que la suite (F_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Planche n° 10

Soit f de classe C^2 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ où k est un entier au moins égal à 1 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k f(x, y),$$

puis que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = k(k-1) f(x, y).$$

On pose $h(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$. Montrer que $h'' + k^2 h = 0$ et en déduire que f est une fonction polynomiale en x et y .

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(tx, ty) = t^k f(x, y)$. Comme f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , g est de classe C^2 sur \mathbb{R} et avec la règle de la chaîne, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = \frac{d(tx)}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + \frac{d(ty)}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = kt^{k-1} f(x, y).$$

Et en $t = 1$, ceci donne :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k f(x, y).$$

En dérivant par rapport à x et par rapport à y la relation ci-dessus (on peut car f est C^2) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = k \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Avec le théorème de Schwarz et en multipliant la première équation par x et la seconde par y :

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = (k-1)x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (k-1)y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Et en additionnant :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (k-1) \left[x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] = k(k-1) f(x, y).$$

Pour $k \geq 2$, on peut aussi calculer $g''(t)$.

Comme plus haut, f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 donc g est de classe C^2 sur \mathbb{R} et avec la règle de la chaîne, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h''(\theta) &= - \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cos \theta, \sin \theta) \right] \\ &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos \theta, \sin \theta) - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos \theta, \sin \theta) + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= - \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(\cos \theta, \sin \theta) \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos \theta, \sin \theta) \\ &\quad - \left[\cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos \theta, \sin \theta) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cos \theta, \sin \theta) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos \theta, \sin \theta) \right] \\ &= -k f(\cos \theta, \sin \theta) - k(k-1) f(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= -k^2 h(\theta) \end{aligned}$$

Donc, on a bien $h'' + k^2 h = 0$.

Les solutions réelles de l'équation ci-dessus sont de la forme $\theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$, soit pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$h(\theta) = A \sum_{p=0}^{E(k/2)} \binom{k}{2p} (-1)^p \cos^{k-2p} \theta \sin^{2p} \theta + B \sum_{p=1}^{E((k-1)/2)} \binom{k}{2p+1} (-1)^p \cos^{k-2p-1} \theta \sin^{2p+1} \theta.$$

On a donc pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= r^k h(\theta) = A \sum_{p=0}^{E(k/2)} (-1)^p \binom{k}{2p} (r \cos \theta)^{k-2p} (r \sin \theta)^{2p} \\ &\quad + B \sum_{p=1}^{E((k-1)/2)} (-1)^p \binom{k}{2p+1} (r \cos \theta)^{k-2p-1} (r \sin \theta)^{2p+1} \end{aligned}$$

Soit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = A \sum_{p=0}^{E(k/2)} (-1)^p \binom{k}{2p} x^{k-2p} y^{2p} + B \sum_{p=1}^{E((k-1)/2)} (-1)^p \binom{k}{2p+1} x^{k-2p-1} y^{2p+1}.$$

Donc, f est une fonction polynomiale en x et y .

Planche n° 11

Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx$.

Montrer que f est définie, positive, de classe C^1 et tend vers $+\infty$ quand $\|a\|$ tend vers $+\infty$.

Montrer que f admet un minimum au point noté $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$.

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k! + \sum_{j=1}^n (k+j)! a_j^* = 0$.

Soit $P(X) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^* \prod_{j=1}^i (X+j)$. Montrer que $P(X) = a_n^* \prod_{k=1}^n (X-k)$.

Calculer $P(-1)$ et en déduire que $a_n^* = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

Montrer que $f(a^*) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k^* x^k \right) dx$ et en déduire que $f(a^*) = \frac{1}{n+1}$.

On a $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en posant $a_0 = 1$, on a :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j)! a_i a_j.$$

Ceci prouve que f est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (car polynômiale).

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \geq 0$, donc $f(a) \geq 0$.

Soit l'application :

$$\Phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}; ((a_0, a_1, \dots, a_n), (b_0, b_1, \dots, b_n)) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) (b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) dx.$$

Φ est bilinéaire, symétrique, définie positive, donc c'est un produit scalaire sur \mathbb{R}^{n+1} . Alors,

l'application $N: (a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-x} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx}$ est une norme euclidienne sur

\mathbb{R}^{n+1} . Or, en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, donc il existe un réel $k > 0$ tel que

$$N(a_0, a_1, \dots, a_n)^2 \geq k \|(a_0, a_1, \dots, a_n)\|_2^2 = k \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right) \text{ et en particulier :}$$

$$f(a) = N(1, a_1, \dots, a_n)^2 \geq k \|(1, a_1, \dots, a_n)\|_2^2 = k(1 + \|a\|_2^2).$$

Or, quand $\|a\|$ tend vers $+\infty$, $\|a\|_2$ aussi, et donc $f(a)$ tend vers $+\infty$.

On a $\lim_{\|a\| \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$, donc il existe $R > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| > R$, on a

$f(a) \geq f(0)$. Sur le compact $B(0, R)$, f est continue donc y admet un minimum μ , qui est en

particulier plus petit que $f(0)$ (car $0 \in B(0, R)$). Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $f(a) \geq \mu$ et f admet un

minimum, en un point noté $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$.

Le point a^* est un point critique, donc $\frac{\partial f}{\partial a_1}(a^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial a_n}(a^*) = 0$, soit pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$k! + \sum_{i=1}^n (i+k)! a_i^* = 0.$$

D'après ce qui précède, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(k) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^* \prod_{j=1}^i (k+j) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^* \frac{(i+k)!}{k!} = \frac{1}{k!} \left(k! + \sum_{i=1}^n (i+k)! a_i^* \right) = 0.$$

Donc, P admet au moins n racines distinctes : $1, 2, \dots, n$ (donc P est de degré au moins n). Alors, le

terme de plus haut degré de P est $a_n^* X^n$, donc le degré de P est exactement n et son coefficient

dominant est a_n^* . Ainsi :

$$P(X) = a_n^* \prod_{j=1}^n (X - j).$$

On a alors :

$$P(-1) = a_n^* \prod_{j=1}^n (-1 - j) = a_n^* (-1)^n (n+1)! = 1 + \sum_{i=1}^n a_i^* \prod_{j=1}^i (-1 + j) = 1.$$

$$\text{Donc, } a_n^* = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$

Posons $A(x) = 1 + a_1^* x + \dots + a_n^* x^n$. On a :

$$f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} A(x) (1 + a_1^* x + \dots + a_n^* x^n) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} A(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k^* \int_0^{+\infty} e^{-x} A(x) x^k dx.$$

(toutes les intégrales convergent pour la même raison que $f(a)$ converge).

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial f}{\partial a_k}(a^*) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k A(x) dx = 0$, d'où $f(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} A(x) dx$, soit :

$$f(a^*) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k^* x^k \right) dx.$$

Alors :

$$f(a^*) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k^* x^k \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx + \sum_{k=1}^n a_k^* \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = 1 + \sum_{k=1}^n k! a_k^* = P(0) = a_n^* (-1)^n n!$$

Avec $a_n^* = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$, on obtient bien :

$$f(a^*) = \frac{1}{n+1}.$$