

Corrigés de la série 1 - CCINP

Planche n° 1

I) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme f donné par $f(P)(X) = (X - a)P'(X) + P(X) - P(a)$.

Donner son noyau, son image, ses éléments propres.

II) Montrer la convergence simple et uniforme de la suite de fonction $f_n(x) = x^n \frac{e^x}{n!}$, puis étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

I) On a $f(1) = 0$ et $f(X^k) = (k+1)X^k - akX^{k-1} - a^k$ pour $k \geq 1$, donc :

$$M_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & -a^2 & -a^3 & -a^4 & \dots & -a^{n-1} & -a^n \\ 0 & 2 & -2a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3a & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & 0 & 4 & -4a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n-1 & -a(n-1) & 0 \\ 0 & & & & & 0 & n & -an \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

$$f(P)(X) = [(X - a)P(X)]' - P(a)$$

$$f(P)(X) = 0 \iff (X - a)P(X) = P(a)(X - a) \iff P(X) = P(a)$$

$$\ker f = \mathbb{R}_0[X]$$

$$f(P)(a) = 0 + rg(f) = n \implies \boxed{\text{Im } f = (X - a)\mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

La matrice de f est triangulaire supérieure, donc $\boxed{Sp(f) = \{0, 2, 3, \dots, n, n+1\}}$.

Soit $\lambda = p+1 \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P)(X) = \lambda P(X) = (p+1)P(X)$, qui donne

$$(X - a)P'(X) - pP(X) = 0.$$

Ceci implique que $g : x \mapsto \frac{P(x)}{(x-a)^p}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, est de dérivée nulle, donc g est constante

et $P = \alpha(X - a)^p$. Réciproquement, si $P = \alpha(X - a)^p$, on a $f(P)(X) = (p+1)P$.

Donc, pour tout $\lambda \in Sp(f)$, le sous-espace propre associé à λ est $\text{Vect}((X - a)^{\max(0, \lambda-1)})$.

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n n'est pas majorée car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

Mais, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'étude de f_n montre que :

$$\sup_{]-\infty, a]} |f_n| = \max(|f_n(-n)|, |f_n(a)|).$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(a)| = 0$ et $|f_n(-n)| = n^n \frac{e^{-n}}{n!} \sim n^n \frac{e^{-n}}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{]-\infty, a]} |f_n| = 0$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout $]-\infty, a]$.

La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(a)| = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \right)$, donc apcr, $\sup_{]-\infty, a]} |f_n| = |f_n(-n)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et la série

$\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge donc, $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]-\infty, a]$.

Par contre, pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a, apcr, $\sup_{[a, b]} |f_n| = \max(|f_n(a)|, |f_n(b)|)$ et, comme $\sum |f_n(a)|$ et $\sum |f_n(b)|$ convergent, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $f_n(x) = (-1)^n |x|^n \frac{e^x}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $\left(|x|^n \frac{e^x}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît apcr et tend vers 0, donc la série $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des série alternés (apcr).

Alors, on a apcr : $\left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sup_{]-\infty, 0]} |f_{n+1}|$.

Et, comme $\sup_{]-\infty, 0]} |f_{n+1}| \rightarrow 0$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_- .

Finalement, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$.

Planche n° 2

I) Déterminer la limite de la suite de terme général $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$

Rayon de convergence et domaine de définition de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

II) On note f l'application qui à $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $D(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques.

Donner la dimension et une base de $\text{Im } f$ et $\text{ker } f$.

D) Posons $f_n(x) = \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^n$ sur $I = [0,1]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, donc continue par morceaux, sur I .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{quand } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{quand } x = 1 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur I .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a $|f_n(x)| \leq 1$, et $x \mapsto 1$ est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur I .

D'après le théorème de convergence dominée, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leq t \leq \frac{1+t^2}{2} \leq 1$ (car $(1-t)^2 \geq 0$), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \int_0^1 dt \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 1.$$

L'encadrement ci-dessus permet de conclure immédiatement que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est $R = 1$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge, $\sum a_n$ diverge.

Comme pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leq \frac{1+t^2}{2} \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$, ce qui permet d'affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Ainsi, la série $\sum (-1)^n a_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Finalement, le domaine de définition de $\sum a_n x^n$ est $[-1,1[$.

II) Par définition du reste de la division euclidienne par D , de degré 4, f est à images dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_6[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ecrivons la division euclidienne de P_i par D , $P_i = Q_i D + f(P_i)$.

On a alors $\lambda P_1 + \mu P_2 = (\lambda Q_1 + \mu Q_2)D + \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ avec $\lambda f(P_1) + \mu f(P_2) \in \mathbb{R}_3[X]$. Par unicité de la division euclidienne, $\lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ est le reste de la division de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par D , donc :

$$f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2).$$

Et ainsi, f est linéaire.

On a :

- $f(X^k) = X^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, car $k < \deg D$;
- $f(X^4) = -(X^3 + X^2 + X + 1)$, car $X^4 = D - (X^3 + X^2 + X + 1)$;
- $f(X^5) = 1$ car $X^5 = (X - 1)D + 1$;
- $f(X^6) = X$ car $X^6 = (X - 1)XD + X$.

Donc, la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_6[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X] \subset \mathbb{R}_6[X]$, $f(P) = P \in \text{Im } f$, donc $\text{Im } f = \mathbb{R}_3[X]$ (de dimension 4).

Pour $P \in \mathbb{R}_6[X]$, on a $f(P) = 0$ si et seulement si $D \mid P$, soit $P = DQ$ avec $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc, $\ker f = \{DQ, Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$, de dimension 3. Une base de $\ker f$ est (D, XD, X^2D) .

Planche n° 3

D) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, l'équation pour tout $e^x = nx$ admet deux solutions x_n et y_n telles que $0 \leq x_n < y_n$.

Etudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n) . En déduire que chacune des suites admet une limite que l'on déterminera.

Montrer qu'en $+\infty$, $x_n \sim \frac{1}{n}$. Trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln n$.

II) On donne une famille (f_1, \dots, f_n) d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que $\sum_{k=1}^n f_k = Id$ et pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a $f_i \circ f_j = 0$.

Montrer que les f_k sont des projecteurs et que E est somme directe de leurs images.

I) Pour un entier $n \geq 3$, posons $f_n(x) = e^x - nx$. L'étude de la fonction f_n (de dérivée $x \mapsto e^x - e^{\ln n}$) montre qu'elle est strictement décroissante de $+\infty$ à $f_n(\ln n)$ sur $]-\infty, \ln n]$ et strictement croissante de $f_n(\ln n)$ à $+\infty$ sur $[\ln n, +\infty[$.

On a $f_n(\ln n) = n(1 - \ln n) < 0$ (car $n \geq 3 > e$) et f_n est continue sur \mathbb{R} , donc le théorème de la bijection continue assure que f_n s'annule exactement une fois sur $]-\infty, \ln n]$, en x_n et exactement une fois sur $[\ln n, +\infty[$, en y_n .

En notant de plus que pour tout $n \geq 3$, $0, 1 \in]-\infty, \ln n]$, $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e - n < 0$, on a pour tout $n \geq 3$:

$$0 < x_n < 1 < \ln n < y_n.$$

De plus, les variations de f_n nous permettent de conclure pour tout $n \geq 3$, $f_n(x) < 0$ si et seulement si $x \in]x_n, y_n[$ et :

- $f_n(x_{n+1}) = e^{x_{n+1}} - nx_{n+1} = e^{x_{n+1}} - (n+1)x_{n+1} + x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) + x_{n+1} = x_{n+1} > 0$ donc $x_{n+1} \notin]x_n, y_n[$, et comme $x_{n+1} < 1 < \ln n$, on a $x_{n+1} < x_n$: la suite (x_n) est strictement décroissante ;
- de même, $f_n(y_{n+1}) = y_{n+1} > 0$ donc $y_{n+1} \notin]x_n, y_n[$, et comme $y_{n+1} > \ln(n+1) > \ln n$, on a $y_{n+1} > y_n$: la suite (y_n) est strictement croissante.

Comme $0 < x_n < 1$ et la suite (x_n) décroît, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1[$. Mais si $\ell > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [e^{x_n} - nx_n] = -\infty, \text{ ce qui est absurde car } f_n(x_n) = 0 \text{ pour tout } n \geq 3.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Comme $\ln n < y_n$, on a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

On a pour tout $n \geq 3$, $e^{x_n} = nx_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = e^0 = 1$, ce qui prouve que : $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Posons $u_n = x_n - \frac{1}{n}$. On a alors : $x_n = \frac{1}{n} + u_n$ avec $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $x_n \rightarrow 0$, on a : $e^{x_n} = 1 + x_n + \frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2) = 1 + x_n + \frac{1}{2}x_n^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, $x_n^2 = \frac{1}{n^2} + 2\frac{u_n}{n} + u_n^2 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $e^{x_n} = nx_n$ se réécrit :

$$1 + \frac{1}{n} + u_n + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + nu_n \Rightarrow (n-1)u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n^2}.$$

Donc : $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Remarquons que l'on a même : $u_n = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{2n^2(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, donc :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Enfin, on a vu que pour tout $n \geq 3$, $0 < \ln n < y_n$ et que $y_n \rightarrow +\infty$. Avec $e^{y_n} = ny_n$, on a :

$$y_n = \ln n + \ln y_n \Rightarrow 1 - \frac{\ln y_n}{y_n} = \frac{\ln n}{y_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln y_n}{y_n}\right) = 1 \Rightarrow y_n \sim \ln n.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a bien aprç, $\frac{y_n}{\ln n} \leq 1 + \varepsilon$, soit : $y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln n$.

II) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $f_1 + \dots + f_n = id_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $j \neq i$

Alors, pour tout $x \in E$:

$$x = f_1(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow f_i(x) = f_i \circ f_1(x) + \dots + f_i \circ f_i(x) + \dots + f_i \circ f_n(x) = f_i \circ f_i(x).$$

Ainsi, $f_i = f_i^2$ et comme f_i est linéaire, c'est un projecteur.

On a de plus :

$$E = \text{Im}(f_1 + \dots + f_n) \subset \text{Im } f_1 + \dots + \text{Im } f_n \subset E \Rightarrow E = \text{Im } f_1 + \dots + \text{Im } f_n.$$

Soit $x \in E$ tel que $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in \text{Im } f_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $x_i = f_i(x_i)$.

Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x = f_1(x_1) + \dots + f_i(x_i) + \dots + f_n(x_n)$ et :

$$f_i(x) = f_i \circ f_1(x_1) + \dots + f_i \circ f_i(x_i) + \dots + f_i \circ f_n(x_n) = f_i \circ f_i(x_i) = f_i(x_i) = x_i$$

Ainsi, $x = f_1(x) + \dots + f_n(x)$ et la décomposition dans $\text{Im } f_1 + \dots + \text{Im } f_n$ est unique, donc :

$$E = \text{Im } f_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_n.$$

Planche n° 4

I) Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, puis le rang de A^2 .

Montrer que $\ker A$ et $\text{Im } A$ sont supplémentaires.

En déduire que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in GL_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

II) On note N la variable représentant le nombre n de jetons tirés au cours d'un jeu. Elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$.

Si N est pair, le joueur gagne N jetons, sinon il en perd N .

Donner la probabilité de gagner, l'expression du gain algébrique G et son espérance.

I) Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a alors $\text{Im } A = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec $u_1 = e_2 + \dots + e_n$ et $u_2 = e_1 + \dots + e_{n-1}$, donc $\text{rg}(A) = 2$. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & (0) & 1 \\ 1 & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } \text{Im } A^2 = \text{Im } A \text{ et } \underline{\text{rg}(A^2) = 2}.$$

On a, grâce au théorème du rang, $\dim(\ker A) + \dim(\text{Im } A) = n$, donc $\dim(\ker A) = n - 2$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $Ae_k = 0$, ce qui permet d'affirmer que $\ker A = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$.

On prouve de même que $\ker A^2 = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) = \ker A$.

Alors, $x \in \ker A \cap \text{Im } A$, on a $Ax = 0$ et $x = Az$ avec $z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $Ax = A^2z = 0$, soit $z \in \ker A^2 = \ker A$ et donc $x = Az = 0$.

Ainsi, $\ker A \cap \text{Im } A = \{0\}$ et comme $\dim(\ker A) + \dim(\text{Im } A) = n$, on a bien :

$$\ker A \oplus \text{Im } A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Remarquons que $Au_1 = u_2$ et $Au_2 = u_1$, donc dans la base $(e_2, \dots, e_{n-1}, u_1, u_2)$ adaptée à la décomposition $\ker A \oplus \text{Im } A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A

est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ (car $\det B = -1 \neq 0$) et A est semblable à A' .

On a $\chi_B = X^2 - 1$ qui est scindé à racines simples, avec $Sp(B) = \{-1, 1\}$. Ainsi, B est diagonalisable, donc A l'est aussi.

II) On gagne quand N est paire, donc si p est la probabilité de gagner, on a :

$$p = \sum_{n=1, n \text{ pair}}^{+\infty} P(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = 2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On a $\Omega(G) = \{-(2n-1), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $G = -(2n-1)$ quand $N = 2n-1$ et $G = 2n$ quand $N = 2n$. Alors :

$$E(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n P(N = 2n) - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) P(N = 2n-1)$$

Soit :

$$E(G) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{2^{2n}} - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) \frac{1}{2^{2n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or, pour $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, ce qui donne en dérivant $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow E(G) = -\frac{1}{2} \frac{16}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}.$$