Corrigés de la série 1 - Mines-Ponts

Planche n° 1

I) Donner la définition d'un projecteur orthogonal d'un espace E euclidien.

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.

Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0;2]$.

Déterminer $\ker u$ et $\ker(u - 2id)$

II) Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $]-R;R[$?

On note p_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ (on rappelle que $(U_1, \dots, U_p)$ est une partition de $[\![1,n]\!]$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes et si leur réunion vaut $[\![1,n]\!]$).

Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

On pose $p_0 = 1$. Montrer que $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, puis calculer $f(x)$.

I) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, posons $J_k = diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où le 1 apparait r fois).

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ (*resp.* $\mathcal{B}'$) dans laquelle la matrice de p (*resp.* q) est J_r avec $r = rg(p)$ (*resp.* J_s avec $s = rg(q)$). Avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in O_n(\mathbb{R})$, on a $M_{\mathcal{B}}(q) = PJ_s\,{}^tP$ et donc :

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) = J_r + PJ_s\,{}^tP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

De plus :

$${}^tA = {}^tJ_r + {}^t({}^tP)\,{}^tJ_s\,{}^tP = J_r + PJ_s\,{}^tP = A.$$

Ainsi, A est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable : le polynôme caractéristique de A, donc de u, est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

****

Pour tout $x \in E$, $\big(p(x) \mid x - p(x)\big) = 0$ donc $\big(p(x) \mid x\big) = \|p(x)\|^2$ et de même, $\big(q(x) \mid x\big) = \|q(x)\|^2$.

Soit $\lambda \in Sp(u)$ et x un vecteur propre associé (non nul).

- D'après l'inégalité de Bessel, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\|q(x)\| \leq \|x\|$, donc :

$$|\lambda|.\|x\| = \|\lambda x\| = \|u(x)\| = \|p(x) + q(x)\| \leq \|p(x)\| + \|q(x)\| \leq 2\|x\|.$$

  Donc $|\lambda| \leq 2$.

- $(u(x)\mid x) = (\lambda x \mid x) = \lambda\|x\|^2 = (p(x)+q(x)\mid x) = (p(x)\mid x) + (q(x)\mid x) = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2$.

  Donc $\lambda \geq 0$.

Finalement, on a bien $\lambda \in [0;2]$.

****

Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec égalité ssi $p(x) = x$ (car $\|p(x)\| + \|x - p(x)\| = \|x\|$).

Si $x \in \ker(u - 2id)$, on a :

$$2\|x\| = \|2x\| = \|u(x)\| = \|p(x)+q(x)\| \leq \|p(x)\| + \|q(x)\| \leq 2\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|p(x)\| + \|q(x)\| = 2\|x\|.$$

Si $p(x) \neq x$ ou $q(x) \neq x$, on a $\|p(x)\| + \|q(x)\| < 2\|x\|$, donc $p(x) = q(x) = x$, soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, on a $u(x) = 2x$. Ainsi :

$$\ker(u - 2id) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q.$$

Si $x \in \ker u$, on a $p(x) + q(x) = 0$, donc $(p(x)+q(x)\mid x) = \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 = 0$, ce qui implique que $p(x) = q(x) = 0$. Réciproquement, si $x \in \ker p \cap \ker q$, on a $u(x) = 0$. Ainsi :

$$\ker u = \ker p \cap \ker q.$$

****

II) La série $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R;R[$.

****

Remarquons déjà que le nombre de partitions de n'importe quel ensemble de cardinal n est p_n.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons $q_{n,k}$ le nombre de partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles $n+1$ appartient à une partie à $k+1$ éléments. On a alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} q_{n,k}$.

Une partie à $k+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $n+1$ est la réunion d'une partie à k éléments de $[\![1,n]\!]$ et de $\{n+1\}$: il y en a $\binom{n}{k}$. Une telle partie étant fixée, pour construire une partition de $[\![1,n+1]\!]$, il faut effectuer une partition de l'ensemble des $n-k$ entiers de $[\![1,n]\!]$ restants : il y en a p_{n-k}. Ainsi, $q_{n,k} = \binom{n}{k} p_{n-k}$ et $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

****

On a $p_1 = 1 = p_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} p_k$, donc la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{p_k}{k!}.$$

On a $\dfrac{p_0}{0!}=1\leq 1$ et si $\dfrac{p_k}{k!}\leq 1$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a $\dfrac{1}{(n-k)!}\dfrac{p_k}{k!}\leq 1$ et :

$$\frac{p_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{p_k}{k!}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}1=1.$$

Ceci prouve par récurrence forte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{p_n}{n!}\leq 1$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{p_n}{n!}x^n\right|\leq|x|^n$.
Comme le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}x^n$ est 1, que *f* a un rayon de convergence $R\geq 1$.

Pour tout $x\in\,]-R;R[$, on a :

$$f'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{p_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{p_{n+1}}{n!}x^n=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k\right)x^n=\sum_{n\geq 0}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{x^k}{k!}p_k\right)\left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)\right].$$

Les séries $\sum\dfrac{x^n}{n!}p_n$ et $\sum\dfrac{x^n}{n!}$ sont absolument convergentes de somme respectives $f(x)$ et e^x, donc le produit de Cauchy $\sum\left[\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{x^k}{k!}p_k\right)\left(\dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)\right]$ converge vers $f(x)e^x$.

Ainsi, $f'(x)=f(x)e^x$, ce qui donne $f(x)=Ke^{e^x}$ et $f(0)=1=Ke$, donc :

$$f(x)=e^{e^x-1}.$$

Planche n° 2

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)=\dfrac{\pi}{2}$.

II) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^3$.

I) Posons $f(x)=\arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)$.

Comme les fonctions $x\mapsto x-1$, $x\mapsto x+1$ et arctangente sont continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, la fonction *f* est aussi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(0)=\arctan(-1)+\arctan 1=0<\dfrac{\pi}{2}$ et $f(1)=\arctan 1+\arctan 2>\dfrac{\pi}{2}$, donc d'après le théorème de la bijection continue, $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ admet exactement une solution *a* dans $\mathbb{R}$ et $0<a<1$.

On a $\arctan(a-1)+\arctan(a+1)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan a$, donc :

$$\tan\big(\arctan(a-1)+\arctan(a+1)\big)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan a\right)\iff\frac{a-1+a+1}{1-(a-1)(a+1)}=\frac{1}{a}\iff a^2=\frac{2}{3}.$$

Et comme $a>0$, $\arctan(x-1)+\arctan x+\arctan(x+1)=\dfrac{\pi}{2}$ admet $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ pour unique solution.

II) Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$. On a $S_0 = 0$, $S_1 = 1$ et $S_2 = 10$. On prend $n \geq 3$.

On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

En dérivant et en multipliant par *x*, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^k = nx(1+x)^{n-1}$.

En dérivant et en multipliant par *x*, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k = n(x+nx^2)(1+x)^{n-2}$.

En dérivant, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 x^{k-1} = n(1+2nx)(1+x)^{n-2} + n(x+nx^2)(n-2)(1+x)^{n-3}$.

En évaluant en 1, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = n(1+2n)2^{n-2} + n(1+n)(n-2)2^{n-3} = 2^{n-3} n^2 (n+3)$.

La formule reste valable pour $n = 0, 1$ et 2, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3).$$

Planche n° 3

I) On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on donne $p \in \mathbb{R}$.

Trouver les fonctions $g \in C^2(U, \mathbb{R})$ telles qu'il existe $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(x, y) \in U$:

$$g(x,y) = f(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = p(x^2+y^2).$$

II) Montrer que *u*, endomorphisme d'un espace vectoriel *E*, est une homothétie si et seulement s'il commute avec tout automorphisme orthogonal de *E*.

Existe-t-il toujours une base canonique dans un espace vectoriel ? Si oui, y en a-t-il une seule ? Plusieurs ? Une infinité ?

Si *u* commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de *E*, qu'en déduit-on pour *u* ?

I) Avec $g(x,y) = f(x^2+y^2)$, on a pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 4f'(x^2+y^2) + 4(x^2+y^2)f''(x^2+y^2).$$

Donc, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = p(x^2+y^2)$ devient pour tout $(x, y) \in U$:

$$4f'(x^2+y^2) + 4(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) = p(x^2+y^2).$$

Soit pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(t)+t f''(t)=\frac{p}{4}t$ donc f' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t y'+y=\frac{p}{4}t$.

On a donc $f'(t)=\frac{p}{8}t+\frac{a}{t}$ avec $a\in\mathbb{R}$, donc $f(t)=\frac{p}{16}t^2+a\ln t+b$ avec $a,b\in\mathbb{R}$ et :

$$g(x,y)=\frac{p}{16}(x^2+y^2)^2+a\ln(x^2+y^2)+b.$$

****

II) Soit $x\in E\setminus\{0\}$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(x)$.

On a $s\in O(E)$, donc $su=us$. On a alors, $s\big(u(x)\big)=u\big(s(x)\big)=u(x)$, donc $u(x)\in\mathrm{Vect}(x)$, soit $u(x)=\lambda_x x$ avec $\lambda_x\in\mathbb{K}$.

Alors, pour tout $\alpha\in\mathbb{K}$:

$$u(\alpha x)=\lambda_{\alpha x}\alpha x=\alpha u(x)=\alpha\lambda_x x \quad\Rightarrow\quad \lambda_{\alpha x}=\lambda_x.$$

Alors, pour tous $x,y\in E$ tels que (x,y) est libre, on a :

$$u(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)=\lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y=u(x)+u(y)=\lambda_x x+\lambda_y y \quad\Rightarrow\quad \lambda_{x+y}=\lambda_x=\lambda_y.$$

Et $u(0)=0=\lambda_x 0$. Ainsi, pour tout $y\in E$, $u(y)=\lambda_x y$ donc u est une homothétie.

La réciproque est immédiate car les homothéties commutent avec tous les endomorphismes de E.

****

Définition (la plus fréquente) : Dans un espace vectoriel, une base canonique est une base qui se présente de manière naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté.

Remarque : Si un espace possède une base canonique, on peut définir un produit scalaire canonique : le produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée.
Réciproque, si E est un espace euclidien, on pourrait éventuellement définir une base canonique comme une base orthonormée…

Cette question est donc fort vaseuse !

****

La preuve que l'on a faite plus haut n'utilise que la commutativité de u avec des symétries orthogonales par à des droite. Or, si s est symétrie orthogonale par rapport à une droite D qui commute avec u, $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $D^\perp$ et commute avec u.

Réciproquement, si s est symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H qui commute avec u, $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $H^\perp$ et commute avec u.

Donc, si u commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E, il commute avec toutes les symétries orthogonales par rapport à une droite de E, donc c'est une homothétie.

Planche n° 4

I) Justifier que $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t}dt$ est définie sur $]-\infty,1[$, puis développer *f* en série entière.

II) Déterminer le polynôme caractéristique de $B=\begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ en fonction de celui de $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si *A* est diagonalisable, *B* l'est aussi.

I) Pour tout $x\in\ ]-\infty,1[$ et tout $t\in[0,1]$, on a :

- $1-x\sin^2 t\geq 1$ donc $1-x\sin^2 t\neq 0$ quand $x\leq 0$;
- $0\leq x\sin^2 t<\sin^2 1<1$ donc $1-x\sin^2 t\neq 0$ quand $0<x<1$.

Donc, pour tout $x\in\ ]-\infty,1[$, $t\mapsto \frac{e^{-t}}{1-x\sin^2 t}$ est définie et continue sur $[0,1]$, donc *f* est bien définie sur $]-\infty,1[$.

****

Pour tout $x\in\ ]-1,1[$ et tout $t\in[0,1]$, on a $\left|x\sin^2 t\right|\leq |x|<1$, donc $\frac{1}{1-x\sin^2 t}=\sum_{n\geq 0}(x\sin^2 t)^n$ et :

$$f(x)=\int_0^1\left(\sum_{n\geq 0} e^{-t}x^n\sin^{2n} t\right)dt.$$

Soit $x\in\ ]-1,1[$ fixé et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\mapsto e^{-t}x^n\sin^{2n} t$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

- f_n est continue sur $[0,1]$;
- pour tout $t\in[0,1]$, $\left|e^{-t}x^n\sin^{2n} t\right|\leq |x|^n$ et $\sum |x|^n$ converge ; ainsi, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

On peut alors conclure que $\int_0^1\left(\sum_{n\geq 0} f_n(t)\right)dt=\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right)$, soit pour tout $x\in\ ]-1,1[$:

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 e^{-t}x^n\sin^{2n} t\,dt\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 e^{-t}\sin^{2n} t\,dt\right)x^n=\sum_{n\geq 0} I_n x^n.$$

Et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n=\int_0^1 e^{-t}\sin^{2n} t\,dt=\int_0^1 e^{-t}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2n}dt=\frac{1}{2^{2n}}\int_0^1\left(e^{-t}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{ikt}e^{-i(2n-k)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^1 e^{-(1+2i(n-k))t}dt=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left[-\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\left[-\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)}\right]_0^1+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\left[-\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)}\right]_0^1\right)$$

$$I_n = -\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\left[\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)}\right]_0^1 + \binom{2n}{n}\left[e^{-t}\right]_0^1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\left[\frac{e^{-(1-2i(n-k))t}}{1-2i(n-k)}\right]_0^1\right)$$

$$= -\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{-(1+2i(n-k))t}}{1+2i(n-k)}\right]_0^1\right) - \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\left[e^{-t}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n-k}\frac{e^{-1}\left(-\cos(2k)+2k\sin(2k)\right)+1}{1+4k^2} - \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(e^{-1}-1)$$

****

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\chi_B(x) = \det\begin{pmatrix} xI_n - A & -I_n \\ -I_n & xI_n \end{pmatrix} \underset{\substack{C_j \leftarrow C_j + \frac{1}{x}C_{j+n} \\ \forall j \in [\![1,n]\!]}}{=} \det\begin{pmatrix} xI_n - A - \frac{1}{x}I_n & -I_n \\ 0_n & xI_n \end{pmatrix} = \det\left(xI_n - A - \frac{1}{x}I_n\right)\det\left(xI_n\right).$$

Donc pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\chi_B(x) = x^n \chi_A\left(x - \frac{1}{x}\right)$ et :

$$\chi_B(0) = \det\begin{pmatrix} -A & -I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \underset{\substack{C_j \leftrightarrow C_{j+n} \\ \forall j \in [\![1,n]\!]}}{=} (-1)^n \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = (-1)^n.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B et $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ avec $Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. On a $\chi_B(0) = (-1)^n \neq 0$, donc $\lambda \neq 0$ et :

$$BX = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY + Z \\ Y \end{pmatrix} = \lambda X = \lambda\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} AY + Z = \lambda Y \\ Y = \lambda Z \end{cases} \iff \begin{cases} AY = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)Y \\ Z = \frac{1}{\lambda}Y \end{cases}$$

Or, $X \neq 0$, donc $Y \neq 0$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\mu = \lambda - \frac{1}{\lambda}$ de A.

Si $\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ \lambda^{-1}Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Y_r \\ \lambda^{-1}Y_r \end{pmatrix}\right)$ est une base de F_λ, le sous-espace propre de B associé à λ (avec $r = \dim F_\lambda$), la famille $\left(Y_1, \dots, Y_r\right)$ est une famille libre de E_μ, le sous-espace propre de A associé à μ, et ainsi, on a :

$$\dim F_\lambda \leq \dim E_\mu.$$

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. On a :

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = \mu \iff \lambda^2 - \mu\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} \neq 0.$$

Donc, il existe deux valeurs distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i} = \mu$ et si Y est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ, on a $AY = \mu Y = \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i}\right)Y$, on a $B\begin{pmatrix} Y \\ \lambda_i^{-1}Y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} Y \\ \lambda_i^{-1}Y \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} Y \\ \lambda_i^{-1}Y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à λ_i.

Si $(Y_1, \dots, Y_p)$ est une base de E_μ le sous-espace propre de A associé à μ, la famille $\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ \lambda_i^{-1}Y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} Y_p \\ \lambda_i^{-1}Y_p \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de F_{λ_i} le sous-espace propre de B associé à λ_i, donc :

$$\dim F_{\lambda_i} \geq \dim E_\mu .$$

Ainsi, on a $\dim F_{\lambda_1} = \dim F_{\lambda_2} = \dim E_\mu$, et $\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim F_\lambda = 2 \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu$.

Alors :

A diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu = n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim F_\lambda = 2 \sum_{\mu \in Sp(A)} \dim E_\mu = 2n \Leftrightarrow$ B diagonalisable.