

Corrigés de la série 2 - CCINP

Planche n° 5

I) Montrer que la suite des fonctions f_n , définies sur $[0,1]$ par $f_n(0)=0$ et, pour $x > 0$, $f_n(x) = x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{2n}$ converge simplement mais pas uniformément vers une fonction f que l'on précisera.

II) On donne un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

On suppose u injectif : déterminer $K_m = \ker u^m$ et $I_m = \text{Im } u^m$.

Montrer que pour tout entier $m \geq 1$: $K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.

On suppose u non injectif : montrer qu'il existe $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.

Montrer alors que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$, $I_p = I_{p+q}$ et $E = K_p \oplus I_p$.

I) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$ tel que $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Et $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 1$ quand $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}$, et, dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = x$.

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{quand } x \in [0,1] \setminus \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-1}, k \in \mathbb{N} \right\} \\ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-1} & \text{quand } x \in \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-1}, k \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

Comme la fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$ et toutes les fonctions f_n le sont (même en 0 car pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0 = f_n(0)$), la convergence n'est pas uniforme.

II) Comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, s'il est injectif il est bijectif. Alors, pour tout entier naturel m , u^m est aussi bijectif et donc :

$$K_m = \ker u^m = \{0\} \text{ et } I_m = \text{Im } u^m = E.$$

Soit un entier $m \geq 1$.

- Pour tout $x \in K_m = \ker u^m$, $u^{m+1}(x) = u(u^m(x)) = u(0) = 0$, donc $x \in K_{m+1}$ et ainsi : $K_m \subset K_{m+1}$.

- On a $\text{Im } u \subset E$, donc $\text{Im } u^{m+1} = u^m(\text{Im } u) \subset u^m(E) = \text{Im } u^m$, soit : $I_{m+1} \subset I_m$.

Comme tout $m \in \mathbb{N}$, $I_{m+1} \subset I_m \subset E$, on a $\text{rg}(u^{m+1}) \leq \text{rg}(u^m) \leq n$, donc la suite $(\text{rg}(u^m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entier naturels décroissante, donc stationnaire. Notons p le plus petit entier tel que $I_p = I_{p+1}$. On a alors $0 \leq \text{rg}(u^{p+1}) = \text{rg}(u^p) < \text{rg}(u^{p-1}) < \dots < \text{rg}(u) < \text{rg}(u^0) = \text{rg}(id_E) = n$ et si $p > n$, alors on aurait $p+1 > n+1$ entiers compris entre 0 et n , ce qui est absurde, donc $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Comme $\text{rg}(u^{p+1}) = \text{rg}(u^p)$, on a $\dim(\ker u^{p+1}) = \dim(\ker u^p)$ par le théorème du rang et, comme $\ker u^p \subset \ker u^{p+1}$, on obtient $K_p = K_{p+1}$.

Pour $q=0$, on a $I_p = I_{p+q}$ et, si, pour $q \in \mathbb{N}$, on a $I_p = I_{p+q}$, alors on a :

$$I_{p+q+1} = \text{Im } u^{q+p+1} = u^q(\text{Im } u^{p+1}) \underset{I_p = I_{p+1}}{=} u^q(\text{Im } u^p) = \text{Im } u^{q+p} = I_{p+q}.$$

Ceci prouve par récurrence sur q que pour tout $q \in \mathbb{N}$: $I_p = I_{p+q}$.

Alors, comme plus haut, $\text{rg}(u^{p+1}) = \text{rg}(u^p)$, donc $\dim(K_p) = \dim(K_{p+q})$, ce qui, avec $K_p \subset K_{p+q}$, implique que pour tout $q \in \mathbb{N}$: $K_p = K_{p+q}$.

Enfin, on a toujours grâce au théorème du rang $\dim K_p + \dim I_p = \dim E$.

Si $x \in K_p \cap I_p$, alors, $u^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = u^p(z)$, donc $u^{2p}(z) = 0$, soit $z \in K_{2p} = K_p$ et $x = u^p(z) = 0$. Ainsi, $K_p \cap I_p = \{0\}$

Finalement, on a bien : $E = K_p \oplus I_p$.

Planche n° 6

I) Soit la suite (u_n) , définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$.

Montrer que (u_n) converge vers 0, puis déterminer la nature de la série de terme général u_n .

II) Pour a donné non nul dans un espace euclidien E , déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u : x \mapsto \alpha(x|a)a - x$ est une isométrie.

D) On a $u_0 \in [0, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in [0, 2] \subset [0, \pi]$, donc $u_n \in [0, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Posons $f(x) = 1 - \cos x - x$. La fonction f est définie, dérivable (donc continue), avec $f'(x) = \sin x - 1 \leq 0$ (qui ne s'annule qu'une fois), donc strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) < 0$ sur $]0, \pi]$ (donc la seule solution de $f(x) = 0$ est 0).

Alors, si $u_0 = 0$, (u_n) est constante nulle (donc converge vers 0) et si $u_0 \in]0, \pi]$, alors $u_n \in]0, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f(u_n) = u_{n+1} - u_n < 0$, donc (u_n) est strictement décroissante, minorée par 0, donc converge vers le point d'annulation de f (car f est continue) soit 0.

Si $u_0 = 0$, la série $\sum u_n$ est nulle donc converge.

Si $u_0 \in]0, \pi]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 - \cos u_n}{u_n} \rightarrow 0$ car $u_n \rightarrow 0$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

II) Remarquons déjà que quel que soit le réel α , u est un endomorphisme de E (par bilinéarité du produit scalaire). De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, on a :

$$\|u(x)\|^2 = \|\alpha(x|a)a - x\|^2 = \|\alpha(x|a)a\|^2 - 2\alpha(x|a)(a|x) + \|x\|^2 = (\alpha^2\|a\|^2 - 2\alpha)(x|a)^2 + \|x\|^2.$$

Alors, u est une isométrie si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$, soit :

$$(\alpha^2\|a\|^2 - 2\alpha)(x|a)^2 = 0.$$

Comme $(x|a)$ n'est pas toujours nul (par exemple pour $x = a$), ceci revient à $\alpha^2\|a\|^2 - 2\alpha = 0$ et ainsi, les valeurs de α pour lesquelles u est une isométrie sont 0 (et dans ce cas, $u = -id_E$) et $\frac{2}{\|a\|^2}$.

Planche n° 7

D) Nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

II) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D semblable à A .

Montrer que si M commute avec D , elle est diagonale.

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^7 + M + I_3 = A$.

D) On a pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{e^{-1}}{t}$ et $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t} dt$ diverge, donc $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ diverge.

On a pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\left| \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq |\sin t|$ et $\lim_{t \rightarrow 0} |\sin t| = 0$, donc $t \mapsto \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ se prolonge par continuité en 0 et $\int_0^a \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

Par ailleurs, pour tout $a \in [1, +\infty[$, on a par IPP/

$$\int_1^a \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \left[-\cos t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{t^2} \cos t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

- Comme plus haut, on a $\left| \cos t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right|$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \cos t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$.
- Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{1}{t^2} \cos t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \cos t \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ainsi, $\int_1^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge et donc $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

II) On a $\chi_A = (X-1)(X-3)(X+1)$, donc A admet trois valeurs propres distinctes : elle est

diagonalisable. On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a :

$$MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 3b & -c \\ d & 3e & -f \\ g & 3h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0 \Leftrightarrow M \text{ diagonale.}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. On a alors $N^7 = P^{-1}M^7P$ et :

$$M^7 + M + I_3 = A \Leftrightarrow N^7 + N + I_3 = D.$$

Or, N commute avec $N^7 + N + I_3$, donc ici avec D et ainsi, N est diagonale.

Alors, si $N = \text{diag}(x, y, z)$, on a $N^7 + N + I_3 = \text{diag}(Q(x), Q(y), Q(z))$ avec $Q = X^7 + X + 1$.

Remarquons que $Q'(x) = 7x^6 + 1 > 0$, donc la fonction polynôme Q est continue sur \mathbb{R} et strictement croissante de $\lim_{-\infty} Q = -\infty$ à $\lim_{+\infty} Q = +\infty$: elle réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Alors :

$$N^7 + N + I_3 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Q(x) & 0 & 0 \\ 0 & Q(y) & 0 \\ 0 & 0 & Q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) = 1 \\ Q(y) = 3 \\ Q(z) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Q^{-1}(1) = 0 \\ y = Q^{-1}(3) = 1 \\ z = Q^{-1}(-1) = -1 \end{cases}$$

Ainsi, $N = \text{diag}(0, 1, -1)$ et $M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$ est la seule solution (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) de

l'équation $M^7 + M + I_3 = A$.

Planche n° 8

I) Montrer que $\sum \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

II) Calculer le polynôme caractéristique de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2-n & n-2 & n \end{pmatrix}$.

Déterminer les sous-espaces propres de A_3 . Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?

I) On a $\frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$ converge et, comme les séries $\sum \frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$ et $\sum \frac{n+1}{2^{n+1}}$ convergent aussi (pour la même raison), on peut écrire :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, si $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$, on a :

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \\ x f''(x) &= \sum_{n \geq 1} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n \geq 0} (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \\ \sum_{n \geq 0} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = 8 \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}} = 10.$$

II) En développant par rapport à la première ligne, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\chi_{A_n} = X^3 - nX^2 - X + 4n - 6 = (X - 2)(X^2 - (n-2)X - 2n + 3).$$

On a $\chi_{A_3} = (X - 2)(X^2 - X - 3)$, donc $Sp(A_3) = \left\{ 2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right\}$, et :

$$\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}[(1, 0, 1)]$$

$$\ker\left(A - \frac{1+\sqrt{13}}{2}I_3\right) = \text{Vect}\left[\left(1, \frac{11-3\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\right]$$

$$\ker\left(A - \frac{1-\sqrt{13}}{2}I_3\right) = \text{Vect}\left[\left(1, \frac{11+3\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\right]$$

- $\chi_{A_1} = (X - 2)(X^2 + X + 1)$ possède une racine réelle (2) et deux racines complexes (j et \bar{j}), donc A_1 n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} , mais l'est dans \mathbb{C} .
- $\chi_{A_2} = (X - 2)(X^2 - 1) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$ possède trois racines réelles (2, 1 et -1), donc A_2 est diagonalisable dans \mathbb{R} .