Corrigés de la série 2 - Centrale-Supélec

Planche n° 9

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}_n[X]$.

On suppose que P et Q admettent une racine commune λ. Montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, non nuls, tels que $UP+VQ=0$.

On pose $n=2$, et on définit ϕ par $\phi(U,V)=UP+VQ$. Montrer que ϕ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.

Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

Si λ est racine commune de P et Q, alors il existe deux polynômes A et B tels que :

$$P=(X-\lambda)A \text{ et } Q=(X-\lambda)B.$$

Comme $\deg P\leq n$, on a $\deg A\leq n-1$ donc $A\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$. De même, $B\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

En posant $U=B$ et $V=-A$, on a bien $U,V\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $UP+VQ=0$.

****

Pour tout $(U,V)\in\mathbb{C}_1[X]^2$, on a :

$$\deg\phi(U,V)\leq\max(UP,VQ)\leq 1+2=3 \quad\Rightarrow\quad \phi(U,V)\in\mathbb{C}_3[X].$$

Pour tous $(U_1,V_1),(U_2,V_2)\in\mathbb{C}_1[X]^2$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\phi\big(\lambda(U_1,V_1)+\mu(U_2,V_2)\big)&=\phi(\lambda U_1+\mu U_2,\lambda V_1+\mu V_2)=(\lambda U_1+\mu U_2)P+(\lambda V_1+\mu V_2)Q\\&=\lambda(U_1P+V_1Q)+\mu(U_2P+V_2Q)=\lambda\phi(U_1,V_1)+\mu\phi(U_2,V_2)\end{aligned}$$

Donc, ϕ est bien linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$.

Une base de $\mathbb{C}_1[X]^2$ est $\mathcal{B}=\big((1,0),(X,0),(0,1),(0,X)\big)$ et si $\mathcal{B}_c=\big(1,X,X^2,X^3\big)$, la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$, on a, en posant $P=a+bX+cX^2$ et $Q=a'+b'X+c'X^2$:

$$A=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}(\phi)=\begin{pmatrix}a&0&a'&0\\b&a&b'&a'\\c&b&c'&b'\\0&c&0&c'\end{pmatrix}.$$

****

On a vu que si P et Q admettent une racine commune, alors il existe $(U,V)\in\mathbb{C}_1[X]^2$, non nuls, tels que $\phi(U,V)=UP+VQ=0$, donc ϕ n'est pas injective, soit :

$$\det A=(ac'-a'c)^2+(a'b-ab')(bc'-b'c)=0.$$

Réciproquement, si $\det A=0$, ϕ n'est pas injective, et donc alors il existe $(U,V)\in\mathbb{C}_1[X]^2$, non nuls, tels que $\phi(U,V)=UP+VQ=0$, ce qui implique que $P\mid VQ$. Si $\deg P=2$, alors P admet deux racines complexes (distinctes ou pas), et comme $\deg V \leq 1$, l'une de ces racines est racine de Q et ainsi, P et Q admettent une racine commune. De même si $\deg Q = 2$. La réciproque est donc vraie quand P ou Q est de degré 2.

Ainsi, quand $\deg P = 2$ ou $\deg Q = 2$, P et Q admettent une racine commune si et seulement si $(ac'-a'c)^2 + (a'b-ab')(bc'-b'c) = 0$.

Si P et Q sont de degrés inférieurs à 1, alors :

- si P ou Q est constant (non nul), P et Q n'admettent jamais de racine commune ;
- si $\deg P = \deg Q = 1$, on a $P = a + bX$ et $Q = a' + b'X$ avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, et P et Q admettent une racine commune si et seulement s'ils sont proportionnels, soit $a'b - ab' = 0$.

Planche n° 10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Donner une relation entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé. Qu'est-ce qu'un polynôme caractéristique ? Donner le théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P son polynôme caractéristique. Montrer que si $P'(0) \neq 0$, alors $\ker u = \ker u^2$.

[*Pour* $n = 3$, *montrer que* $\ker u = \ker u^2$ *si et seulement si 0 est valeur propre de même ordre de multiplicité de* u *et* u^2.] Justifier que cette question est fausse !

Pour les premières questions voir le cours (la relation attendue entre l'ordre de multiplicité n_λ d'une valeur propre λ de $u \in \mathcal{L}(E)$ et la dimension de $\ker(u - \lambda id)$, le sous-espace propre associé est en fait une inégalité : $\dim\left(\ker(u - \lambda id)\right) \leq n_\lambda$).

****

Si $P(0) \neq 0$, alors 0 n'est pas valeur propre de u, donc u appartient à $GL(E)$, ainsi que u^2, et donc $\ker u = \ker u^2 = \{0\}$.

Si $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, alors 0 est racine simple de P ($n_0 = 1$). Alors, $1 \leq \dim\left(\ker u\right) \leq n_0 = 1$ et ainsi, $\dim\left(\ker u\right) = 1$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E, elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0$ où les λ_i sont réels ou complexes, mais non nuls, car 0 est racine simple de $P = X(X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_{n-1})$. Alors, A^2, la matrice de u^2 dans la base $\mathcal{B}$, est semblable à une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1^2, \dots, \lambda_{n-1}^2, 0$ et le polynôme caractéristique de u^2 est $P = X(X - \lambda_1^2)\dots(X - \lambda_{n-1}^2)$, qui admet 0 pour racine simple.

Comme plus haut, on obtient alors $\dim\left(\ker u^2\right) = \dim\left(\ker u\right) = 1$ et comme on a toujours $\ker u \subset \ker u^2$, on a finalement : $\ker u = \ker u^2$.

****

Quel que soit u, 0 est toujours valeur propre de même ordre de multiplicité de u et u^2 : il suffit, comme plus haut, de considérer une matrice de u et de la trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Planche n° 11

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation (E) : $A^2 = {}^tA$.

a) Dans cette question seulement, on suppose que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a et b la matrice A vérifie-t-elle (E) ? Donner les couples (a,b) solutions.

b) Trouver un polynôme de degré 4 annulateur de A.

c) Montrer que A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.

d) Monter que $\ker A^3 = \ker A$ et $\operatorname{Im} A^3 = \operatorname{Im} A$.

e) Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que F est stable par A si pour tout $X \in F$, $AX \in F$. Monter que si F est stable par A, alors $F^\perp$ aussi.

f) Soit $Y \in \operatorname{Im} A$. On note $F_Y = \operatorname{Vect}\left(Y, AY, A^2Y\right)$. Montrer que l'application $X \mapsto AX$ induit une isométrie sur F_Y, puis reconnaitre cette isométrie.

a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}$, donc A vérifie (E) si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2-b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}.$$

Et :

$$\begin{cases} a^2-b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b^2 = a^2 - a \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les couples (a,b) solutions sont donc : $(0,0)$, $(1,0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) On a $A^2 = {}^tA$, donc $A = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (A^2)^2 = A^4$. Ainsi, $P = X^4 - X$ est annulateur de A.

c) On vient de voir que $A^4 = A$, donc, en multipliant par A^2, on obtient $A^6 = (A^3)^2 = A^3$, donc A^3 est la matrice d'un projecteur et qu'elle est symétrique.

Alors, $A^3 = A^2 A = {}^tAA$, donc ${}^t(A^3) = ({}^tA)^3 = (A^2)^3 = A^6 = A^3$ et A^3 est symétrique.

d) On a toujours $\ker A \subset \ker A^3 \subset \ker A^4$ et $\operatorname{Im} A^4 \subset \operatorname{Im} A^3 \subset \operatorname{Im} A$.

Comme $A^4 = A$, on a immédiatement : $\ker A^3 = \ker A$ et $\operatorname{Im} A^3 = \operatorname{Im} A$.

e) On suppose F stable par A.

Soit $X \in F^\perp$, donc pour tout $Y \in F$, $\left(X \mid Y\right) = 0$. On veut $AX \in F^\perp$, autrement dit, pour tout $Z \in F$, $\left(AX \mid Z\right) = 0$.

Soit donc $Z\in F$. On a : $\left(AX\mid Z\right)={}^tX\,{}^tAZ={}^tXA^2Z=\left(X\mid A^2Z\right)$. Or, F stable par A, donc par A^2, et ainsi, $A^2Z\in F$, donc $\left(X\mid A^2Z\right)=0$. Ainsi, $\left(AX\mid Z\right)=0$, ce qui prouve que $F^{\perp}$ est stable par A.

f) Remarquons que, comme $Y\in \operatorname{Im}A=\operatorname{Im}A^3$ et A^3 est une matrice de projecteur, on a $A^3Y=Y$.
On a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\left(AY\mid Y\right)={}^tY\,{}^tAY={}^tYA^2Y=\left(Y\mid A^2Y\right)\\ \left(AY\mid A^2Y\right)={}^tY\,{}^tAA^2Y={}^tYA^4Y={}^tYAY=\left(Y\mid AY\right)\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left(Y\mid AY\right)=\left(Y\mid A^2Y\right)=\left(AY\mid A^2Y\right)=\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(AY\mid AY\right)={}^tY\,{}^tAAY={}^tYA^3Y={}^tYY=\left(Y\mid Y\right)\\ \left(A^2Y\mid A^2Y\right)={}^tY\,{}^t(A^2)A^2Y={}^tYA^6Y={}^tYA^3Y=\left(Y\mid Y\right)\\ A={}^t(A^2)=({}^tA)^2=(A^2)^2=A^4\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left(Y\mid Y\right)=\left(AY\mid AY\right)=\left(A^2Y\mid A^2Y\right)=\beta.$$

Alors, pour tout $X=aY+bAY+cA^2Y\in F_Y$, on a :

$$\begin{aligned}\|X\|^2&=a^2\left(Y\mid Y\right)+b^2\left(AY\mid AY\right)+c^2\left(A^2Y\mid A^2Y\right)+2ab\left(Y\mid AY\right)+2ac\left(Y\mid A^2Y\right)+2bc\left(AY\mid A^2Y\right)\\&=(a^2+b^2+c^2)\beta+2(ab+ac+bc)\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|AX\|^2&=\left\|aAY+bA^2Y+cA^3Y\right\|^2=\left\|aAY+bA^2Y+cY\right\|^2\\&=c^2\left(Y\mid Y\right)+a^2\left(AY\mid AY\right)+b^2\left(A^2Y\mid A^2Y\right)+2ac\left(Y\mid AY\right)+2bc\left(Y\mid A^2Y\right)+2ab\left(AY\mid A^2Y\right)\\&=(a^2+b^2+c^2)\beta+2(ab+ac+bc)\alpha\end{aligned}$$

Ainsi, $\|X\|=\|AX\|$ et donc, l'application $u_Y:F_Y\to F_Y\ ;\ X\mapsto AX$ est une isométrie.

- Si $Y=0$, $F_Y=\{0\}$ et u_Y est l'identité.
- Si $Y\neq 0$ et $AY=\lambda Y$, alors on a $\lambda=0$ ou 1 (car $\lambda\in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et X^4-X est annulateur de A, donc $Sp_{\mathbb{R}}(A)\subset\{0,1\}$). Mais, $\lambda\neq 0$, car sinon, on aurait $Y\in\operatorname{Im}A\cap\ker A=\{0\}$, ce qui est absurde. Donc $AY=Y$, $F_Y=\operatorname{Vect}(Y)$ et u_Y est l'identité.
- Si (Y,AY) est libre et $A^2Y=aY+bAY$ avec $a,b\in\mathbb{R}$, alors :

  $$Y=A^3Y=A\left(aY+bAY\right)=aAY+bA^2Y=aAY+b\left(aY+bAY\right)=abY+(a+b^2)AY.$$

  Donc :

  $$\begin{cases}ab=1\\ a+b^2=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}b^3=-1\\ a=-b^2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ a=b=-1.$$

  Ainsi, $A^2Y=-Y-AY$. La famille (Y,AY) est alors une base de F_Y que l'on prend directe, dans laquelle la matrice de l'isométrie u_Y est :

  $$B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

  Comme $\det B=1$, u_Y est une rotation d'angle $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ (car $Tr(B)=2\cos\theta=-1$).

- Si (Y, AY, A^2Y) est libre, alors c'est une base de F_Y dans laquelle la matrice de u_Y est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est orthogonale, de déterminant 1 (il suffit d'échanger la 1$^{\text{ère}}$ colonne et la 3$^{\text{ème}}$, puis la 2$^{\text{ème}}$ colonne et la 3$^{\text{ème}}$ pour obtenir I_3) : c'est une matrice de rotation. On trouve un axe dirigé par $Y + AY + A^2Y$ et un angle $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$ (car $Tr(B) = 1 + 2\cos\theta = 0$, donc $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$).

Enfin, si $X = Y - AY$, on a $X \wedge BX = Y + AY + A^2Y$, donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ainsi, u_Y est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe $\text{Vect}\left(Y + AY + A^2Y\right)$.

Planche n° 12

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $P = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in \left]0,1\right[$.

Trouver un équivalent simple a_n de x_n, puis de $x_n - a_n$.

Pour $n \geq 3$, soit $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$, dérivable sur $[0,1]$ avec $f_n\,'(x) = n(x^{n-1} - 1) \leq 0$ (avec égalité en 1 uniquement), donc, sur $[0,1]$, f_n est continue et strictement décroissante de $f_n(0) = 1 > 0$ à $f_n(1) = 2 - n < 0$ (car $n \geq 3$). D'après le théorème de la bijection continue, f_n s'annule exactement une fois dans $\left]0,1\right[$ et ainsi, $P = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in \left]0,1\right[$.

****

On a :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 = x_n^{n+1} - nx_n - x_n + 1 = x_n^{n+1} - x_n^n + f_n(x_n) - x_n = (x_n - 1)x_n^n - x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Et comme f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0,1]$, on obtient $x_n > x_{n+1}$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \leq \left[0,1\right[$.

Or, pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 = 0$, donc $nx_n = x_n^n + 1$. Avec $\ell \leq \left[0,1\right[$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n^n + 1) = 1$ et donc : $\underline{x_n \sim \dfrac{1}{n}}$.

****

Posons alors $\varepsilon_n = nx_n - 1 = n\left(x_n - \dfrac{1}{n}\right) \to 0$ car $x_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. La relation $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ se récrit :

$$\varepsilon_n n^n = (1 + \varepsilon_n)^n.$$

Avec la stricte décroissance de f_n sur $[0,1]$, on a par ailleurs :

- $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^n} > 0 = f_n(x_n) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n} < x_n$;

- apcr : $f_n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^n-\frac{1}{n^2}<0=f_n(x_n) \quad\Rightarrow\quad x_n<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}$.

Donc $\frac{1}{n}<x_n<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}$, soit : $0<n\varepsilon_n<\frac{1}{n}$. Ainsi, $n\varepsilon_n\to 0$ et comme $\varepsilon_n\to 0$:

$$n^n\varepsilon_n=(1+\varepsilon_n)^n=e^{n\ln(1+\varepsilon_n)}=e^{n\varepsilon_n+o(n\varepsilon_n)}\to 1 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_n\sim\frac{1}{n^n}.$$

Ainsi, $x_n=\frac{1}{n}(1+\varepsilon_n)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^n}+o\left(\frac{1}{n^n}\right)\right)$, soit : $\underline{x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{n+1}}+o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)}$.

Planche n° 13

Soit $p\in\,]0,1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité *p*. On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on appelle *X* le nombre de faces obtenus.

a. Donner la loi de *X*.

b. Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de *X*.

c. Si $X=n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à *n* dans une urne. On pioche une boule au hasard et *Y* désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de *Y* et son espérance.

a. On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour que $(X=n)$ se réalise, il faut avoir fait $n+2$ lancers et obtenu exactement une fois pile lors des $n+1$ premiers lancers et pile au $(n+2)^{\text{ième}}$ lancer.

Si, pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$, on note $(P_1=k)$ l'évènement : « on a obtenu pile aux $k^{\text{ième}}$ et $(n+2)^{\text{ième}}$ lancers et face sinon », on a $P(P_1=k)=p^2(1-p)^n$ et :

$$P(X=n)=\sum_{k=1}^{n+1}P(P_1=k)=(n+1)p^2(1-p)^n.$$

b. Sous réserve de convergence, on a :

$$E(X)=\sum_{n\geq 0}nP(X=n)=\sum_{n\geq 1}n(n+1)p^2(1-p)^n=p^2(1-p)\sum_{n\geq 1}n(n+1)(1-p)^{n-1}.$$

Or, si on pose $f(x)=\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}$, *f* est C^∞ sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$f'(x)=\sum_{n\geq 1}nx^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2} \quad\text{et}\quad f''(x)=\sum_{n\geq 1}n(n+1)x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 1}n(n+1)(1-p)^{n-1}=\frac{2}{p^3}$ et donc, *X* admet une espérance qui est :

$$E(X)=2\frac{1-p}{p}.$$

c. On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

Pour pouvoir avoir $Y=k$, il faut que $X\geq k$ et dans ce cas, pour $X=n\geq k$, les $n+1$ numéros sont équiprobables, donc $P_{(X=n)}\left(Y=k\right)=\dfrac{1}{n+1}$. On a alors, avec la loi des probabilités totales :

$$P\left(Y=k\right)=\sum_{n\geq k}P\left(X=n\right)P_{(X=n)}\left(Y=k\right)=\sum_{n\geq k}(n+1)p^2(1-p)^n\frac{1}{n+1}$$

$$=p^2\sum_{n\geq k}(1-p)^n=p^2(1-p)^k\frac{1}{1-(1-p)}=p(1-p)^k$$

Et :

$$E(Y)=\sum_{k\geq 0}kP\left(Y=k\right)=\sum_{n\geq 1}k\,p(1-p)^k=p(1-p)\sum_{n\geq 1}k(1-p)^{k-1}=\frac{p(1-p)}{\left(1-(1-p)\right)^2}=\frac{1-p}{p}.$$

Planche n° 14

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, $T_n=\dfrac{1}{S_n}$ et $m_n=E(T_n)$ si elle existe.

a. Calculer $E(X_1)$ et $E(S_n)$.

b. Montrer que $m_n\leq\dfrac{1}{n}$.

c. Montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $E\left(\dfrac{X_k}{S_n}\right)=\dfrac{1}{n}$.

d. Montrer que $E\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right)$ vaut $1+\dfrac{k-n}{p}m_n$ quand $k>n$ et $\dfrac{k}{n}$ sinon.

a. On a $E(X_1)=\dfrac{1}{p}=E(X_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $E(S_n)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\dfrac{n}{p}$.

b. On a $S_n(\Omega)=\left\{k\in\mathbb{N}^*\setminus k\geq n\right\}$, donc $\sum_{k\geq n}P\left(S_n=k\right)=1$ et :

$$m_n=\sum_{k\geq n}\frac{1}{k}P\left(S_n=k\right)\leq\sum_{k\geq n}\frac{1}{n}P\left(S_n=k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k\geq n}P\left(S_n=k\right)=\frac{1}{n}.$$

c. Comme les X_k suivent toutes la même loi, les $\dfrac{X_k}{S_n}$ aussi et $E\left(\dfrac{X_1}{S_n}\right)=E\left(\dfrac{X_2}{S_n}\right)=\ldots=E\left(\dfrac{X_n}{S_n}\right)$.

Alors, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$nE\left(\frac{X_k}{S_n}\right)=E\left(\frac{X_1}{S_n}\right)+\ldots+E\left(\frac{X_n}{S_n}\right)=E\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{S_n}\right)=E\left(\frac{S_n}{S_n}\right)=E\left(1\right)=1\quad\Rightarrow\quad E\left(\frac{X_k}{S_n}\right)=\frac{1}{n}.$$

d. Si $k \le n$, on a :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1}{S_n}\right) + \ldots + E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = kE\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

Si $k > n$, on a :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n + X_{n+1} + \ldots + X_k}{S_n}\right) = E\left(1 + \frac{X_{n+1} + \ldots + X_k}{S_n}\right) = 1 + E\left(\frac{X_{n+1}}{S_n}\right) + \ldots + E\left(\frac{X_k}{S_n}\right).$$

Comme, plus haut, on a $E\left(\frac{X_{n+1}}{S_n}\right) = \ldots = E\left(\frac{X_k}{S_n}\right)$. De plus, comme $k \notin [\![1, n]\!]$, les variables X_k et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ sont indépendantes, donc X_k et $\frac{1}{S_n}$ aussi, donc :

$$E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = E\left(X_k \frac{1}{S_n}\right) = E(X_k)E\left(\frac{1}{S_n}\right) = E(X_k)E(T_n) = \frac{m_n}{p}.$$

Et ainsi :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = 1 + \sum_{i=n+1}^{k} E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = 1 + (k-n)E\left(\frac{X_k}{S_n}\right) = 1 + (k-n)\frac{m_n}{p}.$$

Ainsi, on a bien :

$$E\left(\frac{S_k}{S_n}\right) = \begin{cases} \dfrac{k}{n} & \text{quand } k \le n \\ 1 + \dfrac{k-n}{p} m_n & \text{quand } k > n \end{cases}$$

Planche n° 15

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1+x^2} & \text{quand } y \ge 0 \\ 0 & \text{quand } y < 0 \end{cases}$$

a. La fonction *f* est-elle continue ? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.

b. On considère une droite D_α de $\mathbb{R}^2$, de pente α et passant par le point $P = (1,1)$. Soient S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$ et C la courbe tracée sur S et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est D_α. Soit *M* un point de C. Déterminer la tangente à C en *M*.

a. La fonction $(x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2$, est rationnelle, donc elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Alors, *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ avec $\Delta = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{y}{1+x^2} = 0 = f(a,0) = \lim_{(x,y)\to(a,0^+)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,0^-)} f(x,y).$$

Donc, *f* est continue sur Δ.

Par contre, on a $\lim_{(x,y)\to(a,0^+)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \neq \lim_{(x,y)\to(a,0^-)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, donc *f* n'est pas C^1 en $(a,0)$.

Ainsi, *f* est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

****

Soit $k \in \mathbb{R}$. Appelons $\mathcal{L}_k$ la ligne de niveau $\mathcal{L}_k = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=k\right\}$.

On a déjà $\mathcal{L}_k = \varnothing$ quand $k<0$ et $\mathcal{L}_0 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$.

Pour $k>0$, on a :

$$(x,y)\in\mathcal{L}_k \quad\Leftrightarrow\quad f(x,y)=\frac{y}{1+x^2}=k \quad\Leftrightarrow\quad y=k(1+x^2).$$

Donc, quand $k>0$, $\mathcal{L}_k$ est la parabole d'équation $y=k(1+x^2)$.

b. L'équation réduite de D_α est $y=\alpha(x-1)+1$, donc la courbe C peut être paramétrée par :

$$C:\begin{cases} x \\ \alpha(x-1)+1 \\ f\left(x,\alpha(x-1)+1\right) \end{cases}$$

Si elle existe, la tangente à C en un point $M\left(x,\alpha(x-1)+1,f\left(x,\alpha(x-1)+1\right)\right)$ de C passe par *M* et est dirigée par $\vec{\tau}\left(1,\alpha,g'(x)\right)$ avec $g(x)=f\left(x,\alpha(x-1)+1\right)$.

- Si $\alpha=0$, on a $g(x)=f(x,1)=\frac{1}{1+x^2}$ et $\vec{\tau}\left(1,0,-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

- Si $\alpha>0$, on a $\alpha(x-1)+1\le 0$ quand $x\le 1-\frac{1}{\alpha}$, donc $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{quand } x\le 1-\frac{1}{\alpha} \\ \frac{\alpha(x-1)+1}{1+x^2} & \text{quand } x>1-\frac{1}{\alpha} \end{cases}$.

  Alors, $\vec{\tau}\left(1,\alpha,0\right)$ pour tout $x<1-\frac{1}{\alpha}$ (la tangente est D_α), $\vec{\tau}\left(1,\alpha,\frac{-\alpha x^2+2(\alpha-1)x+\alpha}{(1+x^2)^2}\right)$ pour tout $x>1-\frac{1}{\alpha}$ et il n'y a pas de tangente quand $x=1-\frac{1}{\alpha}$ (il y a deux demi-tangentes).

- Si $\alpha<0$, on a $\alpha(x-1)+1\le 0$ quand $x\ge 1-\frac{1}{\alpha}$, et c'est le contraire de ci-dessus (et toujours pas de tangente quand $x=1-\frac{1}{\alpha}$).

Voici l'allure de S :

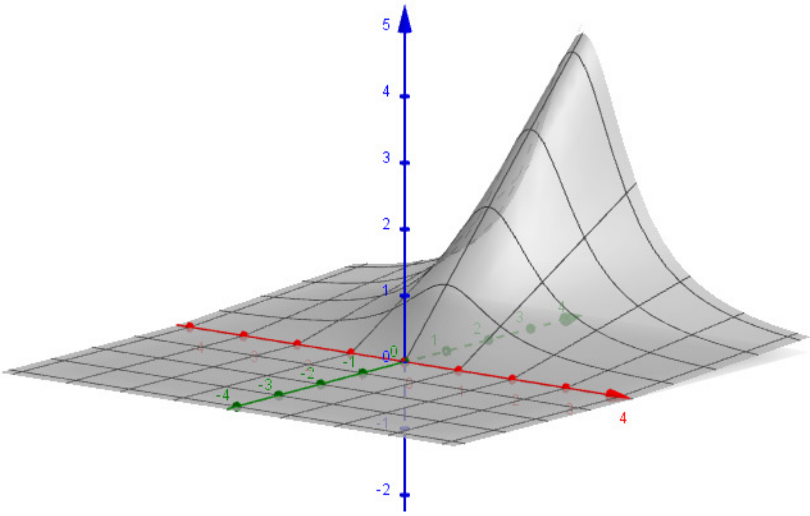

Planche n° 16

On cherche à résoudre $2xy'(x)-2y(-x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1 et résoudre.

La première question est du cours : pour tout $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f=f_p+f_i$ avec $f_p:x\mapsto\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ paire et $f_i:x\mapsto\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ impaire.

****

Soit f une éventuelle solution du problème sur $\mathbb{R}$. La fonction f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$ et, avec les notations ci-dessus, f_p et f_i le sont aussi avec f_p' impaire et f_i' paire.

On alors pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2xf'(x)-2f(-x)=\frac{x}{x^2+1}\quad\Leftrightarrow\quad xf_p'(x)+xf_i'(x)-f_p(-x)-f_i(-x)=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\quad xf_p'(x)+xf_i'(x)-f_p(x)+f_i(x)=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

Or, f_p' et f_i' sont respectivement impaire et paire, donc $x\mapsto xf_p'(x)$ et $x\mapsto xf_i'(x)$ est sont respectivement paire et impaire.

Ainsi :

$$2xf'(x)-2f(-x)=\frac{x}{x^2+1}\quad\Leftrightarrow\quad\underbrace{\left[xf_p'(x)-f_p(x)\right]}_{paire}+\underbrace{\left[xf_i'(x)+f_i(x)\right]}_{impaire}=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}.$$

Comme $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$ est impaire, on obtient, grâce à l'unicité de sa décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$2xf'(x) - 2f(-x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xf_p'(x) - f_p(x) = 0 \\ xf_i'(x) + f_i(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

Donc, f_p est solution *paire* sur $\mathbb{R}$ de $(E_1): \ xy' - y = 0$ et f_i est solution *impaire* sur $\mathbb{R}$ de $(E_2): \ xy' + y = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$.

Les solutions de (E_1), sont les fonctions $x \mapsto kx$ avec k constante. La seule solution paire est donc la fonction nulle.

En remarquant que $x \mapsto xf_i'(x) + f_i(x)$ est la dérivée de $x \mapsto xf_i(x)$ (qui s'annule ne 0), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$xf_i(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\,.$$

Remarquons que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{quand } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$ est définie et impaire sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+1}$, donc g est développable en série entière au voisinage de 0, donc entre autres dérivable en 0 et donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc est l'unique solution impaire sur $\mathbb{R}$ de (E_2).

Finalement, la seule solution est $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{quand } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$.