

Corrigés de la série 2 - Mines-Ponts
Planche n° 5

I) Justifier l'existence de $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt$, puis en donner une valeur approchée sous forme de nombre rationnel à 10^{-3} près (on pourra faire apparaître un développement en série entière usuel).

II) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que :

$$(a_0 \neq 0) \Leftrightarrow \left(\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists ! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q \right).$$

I) $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt$ est impropre en 0, mais $|e^{-t} \ln t| \sim |\ln t|$ et $\int_0^1 |\ln t| \, dt$ converge donc $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt$

converge. On a $\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \ln t \right) dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{(-t)^n}{n!} \ln t$ est définie, continue et intégrable sur $I =]0, 1]$, avec :

$$\int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{n!} \ln t \right| dt = - \int_0^1 \frac{t^n}{n!} \ln t \, dt = \frac{1}{(n+1)^2 n!}.$$

On a $\frac{1}{(n+1)^2 n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{n!} \ln t \right| dt$ converge. Alors :

$$\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} \ln t \, dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 n!}.$$

Si $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2 n!}$, la série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt - \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq |u_{n+1}|.$$

Et $|u_5| = \frac{1}{4320} < 10^{-3}$, donc à 10^{-3} près :

$$\int_0^1 e^{-t} \ln t \, dt \approx \sum_{k=0}^4 u_k = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{96} - \frac{1}{600} = -\frac{5737}{7200}.$$

II) On a $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. On veut :

$$(a_0 \neq 0) \Leftrightarrow \left(\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists ! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q \right)$$

(\Rightarrow) On suppose que $a_0 \neq 0$. Soit $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $b_p \neq 0$ (donc $\deg Q = p$).

Analyse : Si P existe, on a $Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = a_0 P + \sum_{k=1}^n a_k P^{(k)}$ avec $\deg \left(\sum_{k=1}^n a_k P^{(k)} \right) \leq \deg P - 1$.

Comme $a_0 \neq 0$, $\deg \left(\sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} \right) = \deg P = \deg Q = p$. Posons alors $P = \sum_{i=0}^p c_i X^i$ avec $c_p \neq 0$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $P^{(k)} = \sum_{i=k}^p c_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k}$, donc :

$$Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^p a_k c_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} = \sum_{j=0}^p b_j X^j.$$

En identifiant les coefficients, on obtient un système échelonné en les c_i dont tous les pivots (coefficients diagonaux de la matrice triangulaire associée au système) valent $a_0 \neq 0$. Le système admet donc une unique solution, ce qui donne un unique polynôme P .

Ainsi, si P existe, il est unique.

Synthèse : Réciproquement, le polynôme P dont les coefficients sont les composantes du système mentionné ci-dessus, est vérifié $\sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q$ (il est construit de cette façon).

(\Leftarrow) On suppose : $\forall Q \in \mathbb{K}[X], \exists ! P \in \mathbb{K}[X], \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q$.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = Q$. Si $a_0 = 0$, alors $\sum_{k=1}^n a_k P^{(k)} = Q$ et pour tout $c \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^n a_k P_c^{(k)} = Q$ avec $P_c = P + c$. Donc le polynôme P n'est pas unique, ce qui est absurde.

Ainsi, $a_0 \neq 0$.

Planche n° 6

I) Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx$.

II) Montrer que si z_0, z_1, \dots, z_n sont des complexes deux à deux distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

I) On a $\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x = 3x - x + o(x) = 2x + o(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} = 2$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 : $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx$ converge.

Par ailleurs :

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = (1 - e^{-2x}) \left[1 - e^{-2x} + o_{+\infty}(e^{-2x}) \right] = 1 - 2e^{-2x} + o_{+\infty}(e^{-2x}).$$

Donc :

$$\frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} = \frac{1}{x} \left(\left[1 - 2e^{-6x} + o_{+\infty}(e^{-6x}) \right] - \left[1 - 2e^{-2x} + o_{+\infty}(e^{-2x}) \right] \right) = \frac{2e^{-2x} + o_{+\infty}(e^{-2x})}{x} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx$ converge.

Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx$ existe.

On montre comme plus haut que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} dx$ converge et avec $x = 3u$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} dx = \int_{\varepsilon/3}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3u) - 1}{u} du.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx &= \int_0^{\varepsilon/3} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx + \int_{\varepsilon/3}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - 1}{x} dx - \int_{\varepsilon/3}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} dx \\ &= \int_0^{\varepsilon/3} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} dx - \int_{\varepsilon/3}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} dx \\ &= \int_0^{\varepsilon/3} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx - \int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{th} x - 1}{x} dx \\ &= \int_0^{\varepsilon/3} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx - \int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx + \int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{\varepsilon/3} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx - \int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx + \ln 3 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$ et $x \mapsto \frac{\operatorname{th} x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx$ converge.

Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\varepsilon/3} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx - \int_{\varepsilon/3}^{\varepsilon} \frac{\operatorname{th} x}{x} dx + \ln 3 \right] = \ln 3.$$

II) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n a_k (X - z_k)^n = 0$. On a :

$$\sum_{k=0}^n a_k (X - z_k)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n a_k \binom{n}{i} (-z_k)^i X^{n-i} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^n a_k (-z_k)^i \right) \binom{n}{i} X^{n-i}.$$

Donc $\sum_{k=0}^n a_k (X - z_k)^n = 0$ équivaut à $\sum_{k=0}^n a_k (-z_k)^i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit :

$$V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -z_0 & -z_1 & \cdots & -z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-z_0)^n & (-z_1)^n & \cdots & (-z_n)^n \end{pmatrix}.$$

Les z_k étant distincts deux à deux, le déterminant de Vandermonde $\det V$ n'est pas nul, donc V est inversible, ce qui veut dire que la seule solution du système est le vecteur nul, soit $a_0 = \dots = a_n = 0$ et ainsi, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

Planche n° 7 (cf planches 1 et 11)

I) On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec par convention $D_0 = 1$.

Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

On note S sa somme sur $] -1, 1[$. Calculer $T(x) = e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n .

II) On donne $n \geq 2$ variables aléatoires réelles discrètes et indépendantes $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec

$p \in]0, 1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^t U \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$.

Donner les lois de $rg(M)$ et $Tr(M)$. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

D) Remarquons déjà que le nombre de permutations sans point fixe de n importe quel ensemble de cardinal n est D_n .

Le nombre total de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $n!$, mais c'est aussi $\sum_{k=0}^n d_k$ où d_k est le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ laissant $n-k$ points fixes. Pour construire une telle permutation, il y a

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ possibilités pour choisir $n-k$ points fixes, et D_k permutations faisant bouger les k éléments restants, donc $d_k = \binom{n}{k} D_k$ et ainsi, $\sum_{k=0}^n d_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$.

On montre par récurrence (comme dans la planche 1) que $\frac{D_n}{n!} \leq 1$, donc que $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a $S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ et $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, et les deux séries convergent absolument,

donc le produit de Cauchy $\sum_{k=0}^n \left(\frac{D_k}{k!} x^k \right) \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right)$ converge vers $T(x) = e^x S(x)$, soit :

$$T(x) = e^x S(x) = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{D_k}{k!} x^k \right) \left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) \right] = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k x^n = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On a donc pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et à nouveau avec un produit de Cauchy :

$$S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^n x^k \frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!} \right] = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n .$$

Comme $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$, on obtient par unicité du développement en série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n!}{(n-k)!} .$$

II) On a $M = (X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Remarquons que la $j^{\text{ième}}$ colonne de M est $X_j U$, donc le rang de M est au plus 1 et :

$$rg(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0_n \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_j = 0 .$$

Or, $P(X_j = 0) = 1-p$ et les X_j sont indépendantes, donc $P(X_1 = \dots = X_n = 0) = (1-p)^n$ et ainsi, si $R = rg(M)$, on a $R(\Omega) = \{0, 1\}$, avec $P(R = 0) = (1-p)^n$, donc :

$$rg(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - (1-p)^n) .$$

On a $Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ et comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, on a $X_i^2 = X_i$, donc :

$$Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i .$$

Alors :

$$Tr(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) .$$

Si M est une matrice de projection, on a $Tr(M) = rg(M)$, donc $Tr(M) = 0$ ou 1 , ce qui veut dire que soit tous les X_i sont nuls, soit tous les X_i sont nuls sauf un.

Réciproquement, si $X_i = 1$ et $X_j = 0$ pour tout $j \neq i$, on a $M = E_{i,i}$ et $M^2 = E_{i,i}^2 = E_{i,i} = M$, donc M est une matrice de projection.

Ainsi, M est une matrice de projection si et seulement si $Tr(M) \leq 1$, donc la probabilité que M soit la matrice d'une projection est :

$$P(Tr(M) \leq 1) = P(Tr(M) = 0) + P(Tr(M) = 1) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1 + (n-1)p)(1-p)^{n-1} .$$

Planche n° 8

D) Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ peut être prolongée en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ .

Montrer qu'elle est alors de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , mais pas sur \mathbb{R}_+ .

II) Montrer que si deux matrices A et B , carrées, complexes de taille 2 commutent, alors A est un polynôme en B ou B est un polynôme en A . Cela reste-t-il vrai pour des matrices de taille 3 ? Pour des matrices à coefficients réels ?

D) $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ est si x appartient à $]0,1[$, x^2 aussi, si x appartient à $]1,+\infty[$, x^2 aussi. Ainsi, f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Pour $0 < x < 1$:

$$x^2 \leq t \leq x \Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln x^2} \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln x} \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2 \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$x^2 \leq t \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \Rightarrow x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$$

Pour $x > 1$:

$$1 < x \leq t \leq x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{x} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \Rightarrow x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$$

Donc $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln 2$.

f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

f est de classe C^∞ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$, donc f est C^1 en 1.

De plus, au voisinage de 1, $\frac{1}{f'(x)} = \frac{\ln x}{x-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^n$ donc C^∞ en 1 et f' aussi.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ donc f est C^1 en 0, et $f''(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = +\infty$ et f n'est pas C^2 en 0.

II) A est trigonalisable, donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

Alors, A' et $B' = P^{-1}BP$ commutent et si A' est un polynôme en B' ou vice-versa, il en va de même pour A et B . On peut donc supposer A triangulaire supérieure, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Remarquons que si $\chi_A = X^2 - pX - q$, on a $A^2 = pA + qI_2$ d'après le théorème de Cayley Hamilton.

Alors, si $B = P(A)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $(k, k') \in \mathbb{C}^2$ tel que $B = kA + k'I_2$.

Si $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a :

$$BA = AB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha + c\beta \\ a\gamma & b\gamma + c\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\gamma & c\delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b\delta = b\alpha + (c-a)\beta \\ (c-a)\gamma = 0 \\ b\gamma = 0 \end{cases}$$

- Si $a = c$ et $b = 0$, alors $A = aI_2 = aB^0$ est un polynôme en B .
- Si $a = c$ et $b \neq 0$, alors $\frac{1}{b}(A - aI_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} \delta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$, donc $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{b\alpha - a\beta}{b}I_2 + \frac{\beta}{b}A$ est un polynôme en A .
- Si $a \neq c$, alors $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = b \frac{\delta - \alpha}{c - a} \end{cases}$, donc $B = \frac{\alpha c - \delta a}{c - a}I_2 + \frac{\delta - \alpha}{c - a}A$.

Ainsi, soit A est un polynôme en B , soit B est un polynôme en A .

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $AB = BA = B$.

Comme A est diagonale, $P(A)$ est diagonale pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, donc ne peut être égal à B .

On a $B^2 = 0_3$, donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = aI_2 + bB = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, qui ne peut en aucun cas être

égal à A .

Ainsi, A n'est pas un polynôme en B , et B n'est pas un polynôme en A . La propriété ne reste pas vraie pour des matrices de taille 3.

Soient A et B deux matrices carrées, réelles, de taille 2 et qui commutent.

Quitte à intervertir A et B , et d'après ce qui précède, il existe deux complexes a et b tels que $B = aI_2 + bA$. On a alors :

$$B = \bar{B} = \overline{aI_2 + bA} = \bar{a}I_2 + \bar{b}A.$$

Donc :

$$B = \frac{1}{2}(aI_2 + bA + \bar{a}I_2 + \bar{b}A) = \frac{a + \bar{a}}{2}I_2 + \frac{b + \bar{b}}{2}A = P(A).$$

Comme $\frac{a + \bar{a}}{2}$ et $\frac{b + \bar{b}}{2}$ sont réels, on a $B = P(A)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ et ainsi, la propriété reste vraie pour des matrices à coefficients réels.