

Corrigés de la série 3 - CCINP

Planche n° 9

I) Nature et somme de la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

II) Montrer que f , défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

I) On a $n^{(-1)^n} x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $|x| < 1$ et $(n^{(-1)^n} x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand $|x| \geq 1$, donc la série $\sum n^{(-1)^n} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (et diverge grossièrement sinon).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, on a en posant $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n \geq 0} 2n x^{2n} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2x^2 \sum_{n \geq 1} n(x^2)^{n-1} + \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^x t^{2n} dt \right)$$

On a $\sum_{n \geq 0} \left(\int_0^x t^{2n} dt \right) = \int_0^x \left(\sum_{n \geq 0} t^{2n} \right) dt = \int_0^x f(t^2) dt$ car $x \in]-1, 1[$, intervalle de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$. Alors :

$$\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n = 2x^2 f'(x^2) + \int_0^x f(t^2) dt.$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$:

$$\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

II) L'application f est définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ et linéaire par linéarité de l'intégrale.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1} \left[(X+1)^{k+1} - X^{k+1} \right] = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} X^i \in \mathbb{R}_n[X].$$

Ainsi, f est à images dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $f(1) = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(X^k) = X^k + \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} X^i$, donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux valent 1.

Ainsi, $Tr(f) = n+1$.

Planche n° 10

D) Convergence simple de la suite de fonctions données par $f_n(x) = \cos\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R} ? Sur \mathbb{R} ?

II) On munit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] dt$.

Montrer que (ch, sh) est une base de $A = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$.

Montrer que si $f \in A$, alors pour tout $g \in E$, $\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$.

Calculer $\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle$, $\|\text{ch}\|^2$, $\|\text{sh}\|^2$.

Montrer que si $f \in A$ et $g \in B = \{h \in E \mid h(0) = h(1) = 0\}$, $\langle f, g \rangle = 0$.

Pour $f \in H = \{h \in E \mid h(0) = \text{ch} 1, h(1) = 1\}$, calculer $\langle f, \text{ch} \rangle$ et $\langle f, \text{sh} \rangle$. Donner les coordonnées dans la base (ch, sh) de la projection orthogonale de $f \in H$ sur A .

Calculer $\inf_{f \in H} \int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt$.

D) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos x$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction cosinus. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x) - \cos x| = \left| \cos\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)x\right) - \cos x \right| = 2 \left| \sin\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)x\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x}{2n} \right| = \frac{|x|}{n}.$$

Donc, sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a $|f_n(x) - \cos x| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\max(|a|, |b|)}{n} = 0$, et ainsi, (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.

Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(n) - \cos n| = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \right|$ et $\left(2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \right| \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, donc la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} .

II) $A = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$ est l'ensemble des solutions sur $[0,1]$ de $y'' - y = 0$, qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, donc c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et, comme ch et sh sont deux solutions non proportionnelles de cette équation, (ch, sh) est bien une base A .

Soient $f \in A$ et $g \in E$. On a $f'' = f$ et :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)] dt = \int_0^1 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt \\ &= \int_0^1 f''(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt = [f'(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)g'(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt \\ &= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) \end{aligned}$$

Comme $\text{ch}, \text{sh} \in A$, on a :

$$\langle \text{ch}, \text{sh} \rangle = \text{ch}'(1) \text{sh}(1) - \text{ch}'(0) \text{sh}(0) = \text{sh}^2(1)$$

$$\|\text{sh}\|^2 = \langle \text{sh}, \text{sh} \rangle = \text{sh}'(1) \text{sh}(1) - \text{sh}'(0) \text{sh}(0) = \text{ch}(1) \text{sh}(1) = \langle \text{ch}, \text{ch} \rangle = \|\text{ch}\|^2$$

Soient $f \in A$ et $g \in B = \{h \in E \mid h(0) = h(1) = 0\}$. On a :

$$\langle f, g \rangle = f'(1)g(1) - f'(0)g(0) = f'(1) \times 0 - f'(0) \times 0 = 0.$$

Soit $f \in H = \{h \in E \mid h(0) = \text{ch}1, h(1) = 1\}$. On a :

$$\langle f, \text{ch} \rangle = [\text{ch}'(t)f(t)]_0^1 = (\text{sh}1)f(1) - \text{sh}(0)f(0) = \text{sh}1$$

$$\langle f, \text{sh} \rangle = [\text{sh}'(t)f(t)]_0^1 = (\text{ch}1)f(1) - \text{ch}(0)f(0) = 0$$

Pours $f \in H$, posons g la projection orthogonale de f sur A . On a $g \in A$, donc $g = a \text{ch} + b \text{sh}$ et :

$$\begin{aligned} f - g \in A^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases} f - g \perp \text{ch} \\ f - g \perp \text{sh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle f, \text{ch} \rangle = \langle g, \text{ch} \rangle = \langle a \text{ch} + b \text{sh}, \text{ch} \rangle \\ \langle f, \text{sh} \rangle = \langle g, \text{sh} \rangle = \langle a \text{ch} + b \text{sh}, \text{sh} \rangle \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \langle \text{ch}, \text{ch} \rangle + b \langle \text{sh}, \text{ch} \rangle = \text{sh}1 \\ a \langle \text{ch}, \text{sh} \rangle + b \langle \text{sh}, \text{sh} \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ch}(1) \text{sh}(1) + b \text{sh}^2(1) = \text{sh}1 \\ a \text{sh}^2(1) + b \text{ch}(1) \text{sh}(1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ch}1 + b \text{sh}1 = 1 \\ a \text{sh}1 + b \text{ch}1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \text{ch}1 \\ b = -\text{sh}1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, la projection orthogonale de $f \in H$ sur A est $x \mapsto \text{ch}1 \text{ch}x - \text{sh}1 \text{sh}x = \text{ch}(x-1)$.

Posons $\mu = \inf_{f \in H} \int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt = \inf_{f \in H} \|f\|^2$. On a :

$$\begin{aligned} \inf_{f \in H} \|f\|^2 &= \inf_{f \in H} \|f - g + g\|^2 = \inf_{f \in H} (\|f - g\|^2 + \|g\|^2) = \inf_{f \in H} \|f - g\|^2 + \|g\|^2 = \|g\|^2 \\ &= \int_0^1 [g(t)^2 + g'(t)^2] dt = \int_0^1 [\text{ch}^2(1-t) + \text{sh}^2(1-t)] dt \\ &= \int_0^1 [\text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t] dt = \int_0^1 \text{ch}(2t) dt = \frac{1}{2} \text{sh}2 \end{aligned}$$

Planche n° 11

I) Reconnaître l'endomorphisme représenté par $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

II) n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0, 1[$ et vérifient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = p$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.

I) Les colonnes de A sont orthonormées, donc A est orthogonale, c'est la matrice d'une isométrie.

On a $\ker(A - I_3) = \text{Vect}((3, 1, -1)) = D$ est une droite, donc A est une matrice de rotation, d'axe D et d'angle α tel que $\text{Tr}(A) = 1 + 2 \cos \alpha = -\frac{2}{3}$, soit $\alpha = \pm \arccos(-5/6)$. On a $X = (0, 1, 1) \in D^\perp$ et $X \wedge AX = (3, 1, -1)$, donc $\alpha = \arccos(-5/6)$ avec D orienté par $(3, 1, -1)$.

II) Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Y_n = \left(\frac{S_n}{n} - p\right)^2$. On a :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n^2} E(S_n^2) + p^2 - 2 \frac{p}{n} E(S_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) + \frac{1}{n^2} E(S_n)^2 + p^2 - 2 \frac{p}{n} E(S_n).$$

Or, $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{i=1}^n p_i$, et, comme les X_k sont indépendantes :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i).$$

Ainsi :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right)^2 + p^2 - 2p \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

Et, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = p$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right)^2 + p^2 - 2p \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right] = p^2 + p^2 - 2p^2 = 0 \\ 0 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = 0.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Markov donne :

$$0 \leq P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = P(Y_n > \varepsilon^2) \leq P(Y_n \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = 0$, on obtient bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.

Planche n° 12

I) Montrer que si $M \in GL_k(\mathbb{C})$ est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable (on pourra montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples annihilant M).

Soit $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. En calculant N^{-1} , montrer que $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer N^2 , puis $P(N^2)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose N diagonalisable. Montrer que le produit AB est diagonalisable. Qu'en est-il de la réciproque ?

II) Soient, pour $\alpha > 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

Etudier la convergence de $\sum \frac{R_n}{S_n}$ suivant la valeur de α .

I) Soit $M \in GL_k(\mathbb{C})$ tel que M^2 est diagonalisable. On note $Sp(M^2) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, les λ_i étant distincts deux à deux et non nuls car M , donc M^2 , sont inversibles.

On a alors $\prod_{i=1}^r (M^2 - \lambda_i I_k) = 0_k$.

On note $\delta_i \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_i^2 = \lambda_i$ et $\delta_{i+r} = -\delta_i$. Les δ_i pour $i \in \llbracket 1, 2r \rrbracket$ sont deux à deux distincts, car $\delta_{i+r} = -\delta_i \neq \delta_i$ (car $\delta_i^2 = \lambda_i \neq 0$) et pour $j \neq i+r$ et $j \neq i-r$, $\delta_i \neq \delta_j$ (car sinon, $\delta_i^2 = \lambda_i = \delta_j^2 = \lambda_j$).

On a alors $P(M) = \prod_{i=1}^{2r} (M - \delta_i I_k) = 0_k$, donc $P = \prod_{i=1}^{2r} (X - \delta_i)$ est un polynôme annulateur de M , scindé à racines simples, donc M est diagonalisable.

On a $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & A^{-1} \\ B^{-1} & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, donc $N \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ avec $N^{-1} = \begin{pmatrix} 0_n & A^{-1} \\ B^{-1} & 0_n \end{pmatrix}$.

On a $N^2 = \begin{pmatrix} BA & 0_n \\ 0_n & AB \end{pmatrix}$ et comme N^2 est diagonale par blocs, $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0_n \\ 0_n & P(AB) \end{pmatrix}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

Si N est diagonalisable, N^2 l'est aussi, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tels que

$P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0_n \\ 0_n & P(AB) \end{pmatrix} = 0_{2n}$. On a alors $P(BA) = P(AB) = 0_n$, P est annulateur de AB et BA ,

et comme il est scindé à racines simples AB et BA sont diagonalisables.

Pour que la réciproque soit vraie, il faudrait que AB diagonalisable implique BA diagonalisable.

Ceci est vrai ici, car A et B sont inversibles.

Comme AB est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples annulateur de AB .

Posons $P = \sum_{k=0}^q a_k X^k$. On a alors :

$$BP(AB)A = B \sum_{k=0}^q a_k (AB)^k A = \sum_{k=0}^q a_k B(AB)^k A = \sum_{k=0}^q a_k (BA)^{k+1} = (BA) \sum_{k=0}^q a_k (BA)^k = (BA)P(BA).$$

Comme $P(AB) = 0_n$, on a $(BA)P(BA) = 0_n$ et comme A et B sont inversibles, on a :

$$P(BA) = A^{-1}B^{-1}[(BA)P(BA)] = 0_n.$$

Ainsi, P , polynôme P scindé à racines simples est annulateur de BA , donc est diagonalisable.

On a alors avec le même polynôme P , $P(N^2) = \begin{pmatrix} P(BA) & 0_n \\ 0_n & P(AB) \end{pmatrix} = 0_{2n}$ donc P (scindé à racines simples) est annulateur de N^2 et N^2 est diagonalisable. D'après la première question, N l'est aussi.

II) Par comparaison série-intégrale ($t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$), on

obtient $R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{n^\alpha} + R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$1 - \frac{\alpha-1}{n} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n = 1 \Rightarrow R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On a alors en posant $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} > 0$:

$$\frac{R_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R_n}{S} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Alors, $\sum \frac{R_n}{S_n}$ converge si et seulement si $\alpha-1 > 1$, soit $\alpha > 2$.

Planche n° 13

I) Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$.

Si A est diagonalisable, donner la matrice de passage P .

Résoudre le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

II) Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Calculer l'espérance de $Y = X^2 + 1$. Calculer $P(2X < Y)$.

Calculer la probabilité que X soit pair ; y a-t-il plus de chances que X soit impair ?

I) On a $\chi_{A(t)} = (X-1+t)(X-1-t)$, donc $Sp(A(t)) = \{1-t, 1+t\}$, avec $1-t \neq 1+t$ quand $t \neq 0$ (et dans ce cas, $A(t)$ est diagonalisable). Et $A(0) = I_2$, donc $A(t)$ est diagonalisable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En résolvant $A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on trouve une matrice de passage indépendante de t : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix} = P^{-1}A(t)P$, et :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \Leftrightarrow P^{-1}Y'(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix} P^{-1}Y(t) \Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = (1-t)a(t) \\ b'(t) = (1+t)b(t) \end{cases}$$

avec $P^{-1}Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$.

On a enfin $a(t) = K_1 \exp\left(t - \frac{1}{2}t^2\right)$ et $b(t) = K_2 \exp\left(t + \frac{1}{2}t^2\right)$ avec $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, d'où :

$$Y(t) = P \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a(t) + b(t) \\ a(t) + b(t) \end{pmatrix} = K_1 e^{t - \frac{1}{2}t^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 e^{t + \frac{1}{2}t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II) On a :

$$E(Y) = E(X^2 + 1) = E(X^2) + 1 = V(X) + E(X) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Et :

$$\begin{aligned} P(2X < Y) &= P(Y - 2X > 0) = P(X^2 + 1 - 2X > 0) = P((X-1)^2 > 0) \\ &= 1 - P((X-1)^2 = 0) = 1 - P(X = 1) = 1 - \lambda e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Enfin :

$$P(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{n \geq 0} P(X = 2n) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \operatorname{ch} \lambda = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}).$$

Donc :

$$P(X \in 2\mathbb{N} + 1) = 1 - P(X \in 2\mathbb{N}) = 1 - \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda}).$$

Et :

$$P(X \in 2\mathbb{N}) - P(X \in 2\mathbb{N} + 1) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda} > 0.$$

Ainsi, il y a plus de chances que X soit pair.