

Corrigés de la série 3 - Mines-Ponts
Planche n° 9

I) Déterminer la nature puis la valeur de l'intégrale $\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$ où a, b et α sont des réels (avec $a < b$) et n un entier naturel non nul.

II) On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont dans l'intervalle non vide I .

Montrer que pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $(\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda)^t XX \leq {}^t XSX$.

Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

I) Posons $c = b - a > 0$. Avec $t = b - u$, on a :

$$I_{n,\alpha} = \int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt = \int_0^c u^\alpha (c-u)^n du.$$

L'intégrale est impropre en 0 et comme $c > 0$, on a $u^\alpha (c-u)^n \underset{0}{\sim} c^n u^\alpha$, donc $I_{n,\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > -1$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_\varepsilon^c u^\alpha (c-u)^n du = \left[\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} (c-u)^n \right]_\varepsilon^c - \frac{n}{\alpha+1} \int_\varepsilon^c u^{\alpha+1} (c-u)^{n-1} du.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $I_{n,\alpha} = -\frac{n}{\alpha+1} I_{n-1,\alpha+1}$. Alors :

$$I_{n,\alpha} = -\frac{n}{\alpha+1} I_{n-1,\alpha+1} = (-1)^2 \frac{n(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} I_{n-2,\alpha+2} = \dots = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k)} I_{n-k,\alpha+k}.$$

Et enfin :

$$I_{n,\alpha} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} I_{0,\alpha+n} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} \int_a^b (b-t)^{n+\alpha} dt.$$

Soit :

$$I_{n,\alpha} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)(\alpha+n+1)} (b-a)^{\alpha+n+1}.$$

II) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. S est diagonalisable dans une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n), donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t P \Delta P$ avec $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de S . On a donc $\lambda_m = \min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, si on pose $Y = PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$${}^tX SX = {}^tX {}^t P \Delta P X = {}^t(PX) \Delta P X = {}^tY \Delta Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_m y_i^2 = \lambda_m \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_m {}^tY Y.$$

Or, ${}^tY Y = {}^t(PX) P X = {}^tX {}^t P P X = {}^tX X$, donc :

$$\left(\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda \right) {}^tX X \leq {}^tX SX.$$

On prouve de la même façon que ${}^tX SX \leq \left(\max_{\lambda \in Sp(S)} \lambda \right) {}^tX X$ et ainsi, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda \right) {}^tX X \leq {}^tX SX \leq \left(\max_{\lambda \in Sp(S)} \lambda \right) {}^tX X.$$

Soient $A, B \in S_n(I)$ et $t \in [0, 1]$. On veut prouver que $C = tA + (1-t)B \in S_n(I)$.

On a déjà $C \in S_n(\mathbb{R})$.

Notons $\lambda_a = \min_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_A = \max_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_b = \min_{\lambda \in Sp(B)} \lambda$ et $\lambda_B = \max_{\lambda \in Sp(B)} \lambda$.

Comme $\lambda_a \in Sp(A)$ et $A \in S_n(I)$ donc $Sp(A) \subset I$, on a $\lambda_a \in I$. De même, $\lambda_A, \lambda_b, \lambda_B \in I$.

Et comme I est un intervalle non vide, I est convexe donc $t\lambda_a + (1-t)\lambda_b \in I$ et $t\lambda_A + (1-t)\lambda_B \in I$.

On a alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_a {}^tX X \leq {}^tX A X \leq \lambda_A {}^tX X \\ \lambda_b {}^tX X \leq {}^tX B X \leq \lambda_B {}^tX X \end{array} \right\} \Rightarrow (t\lambda_a + (1-t)\lambda_b) {}^tX X \leq {}^tX C X \leq (t\lambda_A + (1-t)\lambda_B) {}^tX X.$$

Soit $\lambda \in Sp(C)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé tel que $\|X\|^2 = {}^tX X = 1$. On a alors :

$${}^tX C X = {}^tX (\lambda X) = \lambda {}^tX X = \lambda \Rightarrow t\lambda_a + (1-t)\lambda_b \leq \lambda \leq t\lambda_A + (1-t)\lambda_B.$$

Comme I est convexe, on a $[t\lambda_a + (1-t)\lambda_b, t\lambda_A + (1-t)\lambda_B] \subset I$ et donc $\lambda \in I$.

Ainsi, $Sp(C) \subset I$ et $C \in S_n(\mathbb{R})$, donc $C \in S_n(I)$, ce qui prouve que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

Planche n° 10

I) Montrer que D défini par $D(f)(x) = x f'(x)$ est un endomorphisme de l'espace des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Trouver $\ker D$, puis les éléments propres de D .

II) Ensemble de définition et calcul de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

I) Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, alors $f' \in E$ et donc $D(f) \in E$. De plus, D est linéaire du fait

de la linéarité de la dérivation. Donc, $D \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $f \in E$. On a :

$$D(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0.$$

Ainsi, $\ker D$ est l'ensemble des fonctions constantes sur \mathbb{R} .

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note $E_\lambda = \ker(D - \lambda \text{id}_E)$ et $E_0 = \ker D$.

Pour $f \in E$, on a :

$$f \in E_\lambda \Leftrightarrow D(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) = \lambda f(x).$$

Donc, E_λ est l'ensemble des solutions dans E de $xy' - \lambda y = 0$.

Les solutions de cette équation sur tout intervalle inclus dans \mathbb{R}^* sont de la forme $x \mapsto k|x|^\lambda$ avec $k \in \mathbb{R}$. La seule possibilité d'obtenir que solution de classe C^∞ sur \mathbb{R} entier est d'avoir $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Finalement, les valeurs propres de D sont les entiers naturels (y compris 0) et le sous-espace propre associé à $n \in \mathbb{N}$ est $\text{Vect}(x \mapsto x^n)$.

II) Quitte à intervertir a et b (en changeant le signe de $F(x)$), supposons $0 < a < b$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et :

- $\frac{e^{-at} - 1}{t} \cos(xt) \underset{0}{\sim} -a$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - 1}{t} \cos(xt) dt$ converge. De même pour $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - 1}{t} \cos(xt) dt$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$ converge.
- $\left| \frac{e^{-at}}{t} \cos(xt) \right| = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ donc $\int^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} \cos(xt) dt$ converge. De même pour $\int^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$, donc $\int^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$ converge.

Finalement, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$ converge pour tout réel x , donc F est définie sur \mathbb{R} .

Soit $f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* ;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -(e^{-at} - e^{-bt}) \sin(xt)$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* ;

- pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at}$ et $t \mapsto e^{-at}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Alors, F est de classe C^1 sur \mathbb{R} avec :

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} (e^{-at} - e^{-bt}) \sin(xt) dt = \operatorname{Im} \left[\int_0^{+\infty} (e^{-(b-ix)t} - e^{-(a-ix)t}) dt \right] \\ &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{-(b-ix)t}}{-(b-ix)} - \frac{e^{-(a-ix)t}}{-(a-ix)} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{b-ix} - \frac{1}{a-ix} \right) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right) + K$$

avec $K \in \mathbb{R}$. On a $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \left(\frac{b}{a} \right) + K$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-ct}}{t} dt = \int_{c\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ pour tout $c > 0$ et :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Or, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1-u \leq e^{-u} \leq 1$, donc :

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u} - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} du \varepsilon(b-a) \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u}.$$

Avec $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u} = [\ln u]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$, on obtient :

$$\ln \left(\frac{b}{a} \right) - \varepsilon(b-a) \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \leq \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $F(0) = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$, donc $K = 0$ et ainsi :

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2} \right).$$

Planche n° 11

I) Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On note U le vecteur de coordonnées X_1, \dots, X_n et $M = U^t U$.

Donner les lois de probabilité de $rg(M)$ et $Tr(M)$.

Donner la probabilité que M soit une matrice de projecteur.

On note V le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 et $S = {}^t V M V$. Donner l'espérance et la variance de S .

II) Soient E un \mathbb{R} -espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe p endomorphismes non nuls v_1, \dots, v_p et p réels distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{i=1}^p \lambda_i^n v_i$.

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) v_i$ et que u est diagonalisable.

Montrer qu'il existe une base (L_1, \dots, L_p) de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$:

$$L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}.$$

Montrer que $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

I) Pour tout sauf la dernière question, voir la planche 7.

On a $M = (X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, donc $S = {}^tVMV = \sum_{i=1}^n \left(X_i \sum_{j=1}^n X_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^2 = (Tr(M))^2$.

On a vu (planche 7) que $Tr(M)$ suit la loi binomiale de paramètres n et p , donc :

$$E(S) = E\left([Tr(M)]^2\right) = V(Tr(M)) + E(Tr(M))^2 = np(1-p) + (np)^2 = np(1+(n-1)p).$$

Et, avec le théorème du transfert :

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left([Tr(M)]^4\right) = \sum_{k=0}^n k^4 P(Tr(M) = k) = \sum_{k=1}^n k^4 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n k^3 (k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=2}^n k^2 (k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) \left[\sum_{k=2}^n k^2 \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=2}^n k \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \right] + E(S) \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+2)^2 + (k+2) \right] \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-k} + E(S) \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} (k^2 + 5k + 6) \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-k} + E(S) \\ &= n(n-1) p^2 \left[(n-2)p(1+(n-3)p) + 5(n-2)p + 6 \right] + np(1+(n-1)p) \\ &= np \left[(n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1 \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(S) &= E(S^2) - E(S)^2 \\ &= np \left[(n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1 \right] - \left[np(1+(n-1)p) \right]^2 \\ &= np \left[-2(n-1)(2n-3)p^3 + 4(n-1)(n-3)p^2 + (6n-7)p + 1 \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E(S) = np(1+(n-1)p) \quad \text{et} \quad V(S) = np \left[-2(n-1)(2n-3)p^3 + 4(n-1)(n-3)p^2 + (6n-7)p + 1 \right].$$

II) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^p a_k \lambda_i^k v_i = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda_i^k \right) v_i = \sum_{i=1}^p P(\lambda_i) v_i.$$

Si pose $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$, on a $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, donc $P(u) = 0$.

Ainsi, P est annulateur de u et est scindé à racines simples (car les λ_i sont distincts), donc u est diagonalisable.

Les L_i sont les polynômes de Lagrange : $L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^p \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.

Comme $P(u) = 0$ avec $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$, on a $Sp(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Supposons qu'il existe $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\lambda_k \notin Sp(u)$.

Alors, $Q = \prod_{i=1, i \neq k}^p (X - \lambda_i)$ est annulateur de u , soit $Q(u) = 0$. Or, on a $Q(u) = \sum_{i=1}^p Q(\lambda_i) v_i = Q(\lambda_k) v_k$, donc $Q(\lambda_k) v_k = 0$ et comme $v_k \neq 0$, on a $Q(\lambda_k) = 0$, qui est absurde.

Ainsi, $\lambda_k \in Sp(u)$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et donc, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset Sp(u)$.

Finalement, on a bien :

$$Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}.$$

Planche n° 12

I) Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

Donner un équivalent de f en $+\infty$.

II) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètres respectifs p et q .

Montrer que $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$ sont deux variables aléatoires.

Donner leur fonction génératrice et, si elle existe, leur espérance.

I) On a $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x}{n(1+nx^2)} \sim \frac{1}{n^2 x}$ donc la série $\sum \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge.

Ainsi, f est définie sur \mathbb{R} . Remarquons que f est impaire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}$ est impaire et de classe C^∞ sur \mathbb{R} , avec $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$.

Avec $f_n(0) = \lim_{+\infty} f_n = 0$, on en déduit que sur \mathbb{R}_+ , f_n est positive et admet $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ pour maximum. Par imparité, on obtient $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ sur \mathbb{R} , et comme $\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R} , donc f est continue sur \mathbb{R} .

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $|f_n'(x)| \leq \frac{1+nx^2}{n(nx^2)^2} = \frac{1}{n^3x^4} + \frac{1}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n^3a^4} + \frac{1}{n^2a^2}$ et la série $\sum \left(\frac{1}{n^3a^4} + \frac{1}{n^2a^2}\right)$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et ainsi, f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et comme f est impaire, elle est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+nx^2)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $|x| \leq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq n \leq N(x)$ avec $N(x) = E\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a :

$$\frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{1}{2n}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} N(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{1}{2n} = +\infty$, et par comparaison, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$.

Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et non dérivable en 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{n^2}$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \frac{x^2}{n(1+nx^2)} \leq \frac{x^2}{n(nx^2)} = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \frac{x^2}{n(1+nx^2)}$ vérifie l'hypothèse de domination sur \mathbb{R}_+^* , donc converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{n(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

II) X est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) et à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire une application de Ω dans \mathbb{N}^* telle que l'image réciproque de tout élément de \mathbb{N}^* appartient à \mathcal{A} .

Il en va de même pour Y .

Alors, $Z = \min(X, Y)$ est une application de Ω dans \mathbb{N}^* et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)) = X(\omega) \text{ ou } Y(\omega).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 Z^{-1}(\{n\}) &= \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)) = n\} \\
 &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = n, Y(\omega) \geq n\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq n, Y(\omega) = n\} \\
 &= \left(\bigcup_{k \geq n} [\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = n\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = k\}] \right) \\
 &\quad \cup \left(\bigcup_{k \geq n} [\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = n\}] \right) \\
 &= \left(\bigcup_{k \geq n} [X^{-1}(\{n\}) \cap Y^{-1}(\{k\})] \right) \cup \left(\bigcup_{k \geq n} [X^{-1}(\{k\}) \cap Y^{-1}(\{n\})] \right)
 \end{aligned}$$

Comme $X^{-1}(\{p\}) \in \mathcal{A}$, $Y^{-1}(\{p\}) \in \mathcal{A}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et toute intersection ou union finie ou dénombrable d'éléments de \mathcal{A} est encore dans \mathcal{A} , on a $Z^{-1}(\{n\}) \in \mathcal{A}$ et ainsi, Z est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) .

Il en va de même pour T .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 P(Z = n) &= P(\min(X, Y) = n) \\
 &= P(X = n, Y > n) + P(X > n, Y = n) + P(X = Y = n) \\
 &= P(X = n)P(Y > n) + P(X > n)P(Y = n) + P(X = n)P(Y = n) \\
 &= (1-p)^{n-1} p \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-q)^{k-1} q + (1-q)^{n-1} q \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p + (1-p)^{n-1} p(1-q)^{n-1} q \\
 &= (1-p)^{n-1} p(1-q)^n + (1-q)^{n-1} q(1-p)^n + (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} pq \\
 &= (1-p)^{n-1} (1-q)^{n-1} (p+q-pq) \\
 &= [(1-p)(1-q)]^{n-1} [1-(1-p)(1-q)]
 \end{aligned}$$

Donc, Z suit une loi géométrique de paramètre $r = 1 - (1-p)(1-q)$. On a donc :

$$G_Z(t) = \frac{rt}{1-(1-r)t} \quad \text{et} \quad E(Z) = \frac{1}{r}.$$

On montre de même que :

$$\begin{aligned}
 P(T = n) &= P(X = n)P(Y < n) + P(X < n)P(Y = n) + P(X = n)P(Y = n) \\
 &= P(X = n)[1 - P(Y = n) - P(Y > n)] + [1 - P(X = n) - P(X > n)]P(Y = n) + P(X = n)P(Y = n) \\
 &= P(X = n) + P(Y = n) - P(Z = n) = (1-p)^{n-1} p + (1-q)^{n-1} q - (1-r)^{n-1} r
 \end{aligned}$$

Donc :

$$G_T(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t} + \frac{qt}{1-(1-q)t} - \frac{rt}{1-(1-r)t}$$

Et $Z + T = X + Y$, donc $E(T) = E(X) + E(Y) - E(Z)$, soit :

$$E(T) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}.$$