

Corrigés de la série 4 - CCINP

Planche n° 14

I) Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on cherche à déterminer les matrices A symétriques réelles de taille n telles que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0_n$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines d'un polynôme de degré 3. Conclure.

II) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Trouver a, b et c réels tels que $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$.

En déduire $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.

I) Soit A une solution. A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

$P = X^3 + 4X^2 + 5X$ est annulateur de A , donc les valeurs propres de A sont racines de P .

Or, les valeurs propres de A sont toutes réelles et la seule racine réelle de P est 0, donc la seule valeur propre de A est 0 et comme A est diagonalisable, elle est nulle.

Réciproquement, la matrice nulle est bien solution, et ainsi, la seule solution est la matrice nulle.

II) Si on pose $g(x,t) = \frac{1}{1+x^3+t^3}$, on a :

- $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $0 \leq g(x,t) \leq \frac{1}{1+t^3}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (car continue sur \mathbb{R}_+ et équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ en $+\infty$).

Ainsi, f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

On a : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right)$.

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \left[\ln \left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} \right) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(2t-1)^2+3} \underset{u=2t-1}{=} \int_{-1}^{+\infty} \frac{du}{u^2+3} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

On a vu que $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ converge. Alors, pour tout $x > 0$:

$$|f(x)| = f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3} \stackrel{t=xu}{=} \int_0^{+\infty} \frac{xdu}{1+x^3+x^3u^3} \leq \int_0^{+\infty} \frac{xdu}{x^3+x^3u^3} = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}.$$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Planche n° 15

I) Donner le domaine de convergence D de la série de fonctions $\sum u_n$ telle que $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n}$.

Converge-t-elle normalement sur D ? On note S sa somme et R_n le reste d'ordre n .

Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et en déduire que S est continue. S est-elle intégrable ?

II) Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = {}^t A$.

Déterminer les valeurs propres de A si on suppose que 0 en est une.

Montrer que A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I) Pour tout $n \geq 2$, u_n est définie sur \mathbb{R}_+^* . Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $0 < x < 1$, on a $\frac{1}{x} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = +\infty$ et $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.
- Si $x = 1$, on a $u_n(1) = 0$ donc $\sum_{n \geq 2} u_n(1)$ converge.
- Si $x > 1$, on a $\frac{1}{x} < 1$, donc $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ converge.

Ainsi, $D =]1, +\infty[$.

Soient $n \geq 2$ et $x \in]1, +\infty[$. On a :

$$|R_n(x)| = R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x) = \sum_{k \geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln k} \leq \sum_{k \geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln(n+1)}.$$

Et :

$$\sum_{k \geq n+1} \frac{\ln x}{x^k \ln(n+1)} = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{1}{x-1} \ln x.$$

L'étude de $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$, montre que cette fonction est strictement décroissante de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ à

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$, donc pour tout $x \in]1, +\infty[$, $0 < \frac{\ln x}{x-1} < 1$.

Comme $0 < \frac{1}{x^n} < 1$, on obtient bien :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Ceci reste vrai quand $x=1$, car $|R_n(1)|=0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, l'inégalité ci-dessous prouve la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur D .

Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur D , la fonction S est continue sur D .

On vient de voir que $\sum u_n$ converge sur D et que la somme S est continue sur D .

De plus, u_n est continue et intégrable sur D , car $u_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{1,5}}\right)$ et :

$$\int_1^{+\infty} |u_n(x)| dx = \int_1^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{1}{\ln n} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx.$$

Or, par parties :

$$\int_1^A x^{-n} \ln x dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \ln x \right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-n}}{-n+1} dx = \left[-\frac{\ln x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 x^{n-1}} \right]_1^A.$$

Et en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx = \frac{1}{(n-1)^2}$, et :

$$\int_1^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{1}{(n-1)^2 \ln n}.$$

On a $\frac{1}{(n-1)^2 \ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \int_1^{+\infty} |u_n(x)| dx$ converge.

Ceci permet de conclure que S est intégrable sur D , avec :

$$\int_1^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \ln n}.$$

II) On a $A^2 = {}^t A$, donc $A^4 = ({}^t A)^2 = {}^t (A^2) = {}^t ({}^t A) = A$, ainsi $X^4 - X$ est un polynôme annulateur de A .

Comme A est 2×2 , elle admet au plus deux valeurs propres (réelles ou complexes).

Si 0 (réel) est valeur propre, alors ses deux valeurs propres sont réelles et ce sont des racines de $X^4 - X$ (qui est annulateur de A). Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont 0 et 1.

Enfin, si 0 est la seule valeur propre de A , alors son polynôme caractéristique est X^2 et $A^2 = 0_2$.

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Mais alors, $'A = A^2 = 0_2$ et donc A est nulle, ce qui n'est pas. Ainsi, les valeurs propres de A sont 0 et 1.

Comme A est 2×2 et possède deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et donc, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Alors, $'A = A^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$.

Finalement, A est symétrique réelle, de valeurs propres 1 et 0, donc d'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Planche n° 16

I) Trouver a, b et c tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge et la calculer.

II) Pour un entier n pair tel que $n \geq 2$, déterminer le rang de $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre.

Montrer que A_n est diagonalisable, donner ses éléments propres.

I) On a :

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Pour tout $t \in]0, 1]$, $\frac{1}{t} \geq 1$ donc $E\left(\frac{1}{t}\right) \in \mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E\left(\frac{1}{t}\right) = n$ pour $\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}$ et :

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} tE\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} nt dt = \frac{n}{2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} tE\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge aussi.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} tE\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 tE\left(\frac{1}{t}\right) dt$ et $t \mapsto tE\left(\frac{1}{t}\right)$ est positive sur $]0, 1]$, donc

l'intégrale $\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge, avec : $\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} tE\left(\frac{1}{t}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}$.

Avec la question préliminaire, on obtient :

$$\int_0^1 t E\left(\frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Soit :

$$\int_0^1 t E\left(\frac{1}{t}\right) dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

II) Comme $n \geq 2$, A possède au moins deux colonnes distinctes, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et toutes

les autres colonnes valent soit C_1 , soit C_2 . De plus, C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles (sinon on

aurait $\begin{vmatrix} 1 & n \\ 2 & n-1 \end{vmatrix} = -(n+1) = 0$, qui est faux), donc pour tout entier $n \geq 2$:

$$\text{rg}(A_n) = 2.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\chi_{,M} = \det(XI_n - {}^t M) = \det({}^t(XI_n - M)) = \det(XI_n - M) = \chi_M.$$

Comme $\text{rg}(A_n) = 2$, on a $\dim(\ker A_n) = n - 2$.

Comme $n \geq 2$ est pair, on peut poser $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et si on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A , on a, pour tout $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ $u(e_{2k-1} - e_1) = 0$ et $u(e_{2k} - e_2) = 0$, donc $(e_3 - e_1, \dots, e_{2p-1} - e_1, e_4 - e_2, \dots, e_{2p} - e_2)$ est une famille libre de $n - 2$ vecteurs du noyau, donc une base de $\ker A_n$.

On remarque de plus que :

$$\begin{aligned} u(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} + e_n) &= (p + pn)e_1 + (2p + p(n-1))e_2 + \dots + (p + pn)e_{n-1} + (2p + p(n-1))e_n \\ &= \frac{n(n+1)}{2}(e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} + e_n) \end{aligned}$$

Donc, $\frac{n(n+1)}{2} \in \text{Sp}(A_n)$ et $e_1 + e_2 + \dots + e_{n-1} + e_n \in \ker\left(A_n - \frac{n(n+1)}{2}I_n\right)$.

$$\text{Par ailleurs, } {}^t A_n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+3-\dots+(n-1)-n \\ n-(n-1)+\dots-3+2-1 \\ 1-2+3-\dots+(n-1)-n \\ \vdots \\ n-(n-1)+\dots-3+2-1 \end{pmatrix} = -\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $-\frac{n}{2} \in Sp({}^t A_n) = Sp(A_n)$ et la résolution de $A_n X = -\frac{n}{2} X$ donne :

$$\ker\left(A_n + \frac{n}{2} I_n\right) = \text{Vect}(-ne_1 + 2e_2 \dots - ne_{n-1} + 2e_n).$$

On a $\dim(\ker A_n) = n-2$, $\dim\left(\ker\left(A_n + \frac{n}{2} I_n\right)\right) = 1$ et $\dim\left(\ker\left(A_n - \frac{n(n+1)}{2} I_n\right)\right) \geq 1$. Comme la somme de ces trois dimensions ne doit pas dépasser n , on a $\dim\left(\ker\left(A_n - \frac{n(n+1)}{2} I_n\right)\right) = 1$.

Finalement, A_n est diagonalisable et :

$$Sp(A_n) = \left\{0, -\frac{n}{2}, \frac{n(n+1)}{2}\right\} \text{ avec } \begin{cases} \ker A_n = \text{Vect}(e_3 - e_1, \dots, e_{2p-1} - e_1, e_4 - e_2, \dots, e_{2p} - e_2) \\ \ker\left(A_n + \frac{n}{2} I_n\right) = \text{Vect}(-ne_1 + 2e_2 \dots - ne_{n-1} + 2e_n) \\ \ker\left(A_n - \frac{n(n+1)}{2} I_n\right) = \text{Vect}(e_1 + e_2 \dots + e_{n-1} + e_n) \end{cases}$$

Planche n° 17

I) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$ est semi-convergente.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique à valeurs propres positives, si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t B B$.

I) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, si $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{2n}$, on a $v_n \sim -\frac{1}{8n^2}$ donc $\sum v_n$ converge et $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge. Comme $u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + v_n$, la série $\sum u_n$ est convergente.

Par contre, $|u_n| \sim \frac{1}{2n}$ et $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, donc $\sum |u_n|$ diverge, ce qui prouve que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, donc est semi-convergente.

II) (\Rightarrow) On suppose que A est symétrique à valeurs propres positives.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, autrement dit, il existe $P \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telles que $A = {}^tPDP$.

Or, $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$, donc si on pose $\Delta = {}^t\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, on a ${}^t\Delta\Delta = \Delta^2 = D$ et :

$$A = {}^tP{}^t\Delta\Delta P = {}^t(\Delta P)\Delta P = {}^tBB \text{ avec } B = \Delta P.$$

(\Leftarrow) On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

On a alors ${}^tA = {}^t({}^tBB) = {}^tB({}^tB) = {}^tBB = A$, donc A est symétrique et, pour tout $\lambda \in Sp(A)$, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ est un vecteur propre associé à λ , on a $AX = {}^tBBX = \lambda X$, donc :

$${}^tXAX = {}^tX{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\|BX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0 \text{ (car } \|X\| \neq 0).$$

Ainsi, A est symétrique à valeurs propres positives.

Planche n° 18

I) Soient n variables aléatoire indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Soit la variable aléatoire N qui vaut 0 si $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ et $\min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N .

II) Montrer que H , plan de E , un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda \text{id}) \subset H$.

Trouver les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

I) On a $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ avec :

$$N = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1 \\ \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k = 0\} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1 \\ 1 & \text{si } X_1 = 0 \\ k & \text{si } X_1 = \dots = X_{k-1} = 1 \text{ et } X_k = 0 \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

Alors, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P(N = k) = \begin{cases} P(X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1) & \text{pour } k = 0 \\ P(X_1 = 0) & \text{pour } k = 1 \\ P(X_1 = \dots = X_{k-1} = 1, X_k = 0) & \text{pour } k \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

Et comme les X_k sont indépendantes, on a :

$$P(N = k) = \begin{cases} P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\dots P(X_n = 1) = \frac{1}{n!} & \text{pour } k = 0 \\ P(X_1 = 1) = 0 & \text{pour } k = 1 \\ P(X_1 = 1)\dots P(X_{k-1} = 1)P(X_k = 0) = \frac{1}{(k-1)!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{k-1}{k!} & \text{pour } k \in \llbracket 2, n \rrbracket \end{cases}$$

Soit :

$$P(N = k) = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{pour } k = 0 \\ \frac{k-1}{k!} & \text{pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

Remarquons que l'on a $\sum_{k=0}^n P(N = k) = \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{n!} + 1 - \frac{1}{n!} = 1$.

II) Soit H un plan de E , \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$. On veut :

$$u(H) \subset H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \text{Im}(u - \lambda id) \subset H.$$

(\Rightarrow) On suppose que $u(H) \subset H$.

Soit (e_1, e_2) une base H , complétée en une base de E , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Comme $u(H) \subset H$, la matrice de u dans \mathcal{B} a la forme suivante : $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Alors, $M_{\mathcal{B}}(u - \lambda id) = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui montre que $\text{Im}(u - \lambda id) \subset H = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda id) \subset H$.

(\Leftarrow) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda id) \subset H$.

On a :

$$H \subset E \Rightarrow (u - \lambda id)(H) \subset (u - \lambda id)(E) = \text{Im}(u - \lambda id) \subset H.$$

Donc, $(u - \lambda id)(H) \subset H$ et pour tout $x \in H$:

$$u(x) = \underbrace{(u - \lambda id)(x)}_{\in H} + \underbrace{\lambda x}_{\in H} \in H.$$

Et ainsi, $u(H) \subset H$.

On a $\chi_A = X^3 - 4X^2 - 14X + 41$ et l'étude de $x \mapsto x^3 - 4x^2 - 14x + 41$ sur \mathbb{R} montre que χ_A admet trois racines réelles distinctes : a, b et c . Ainsi, $Sp(A) = \{a, b, c\}$. Si on note $D_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$, alors D_a, D_b et D_c sont des droites et ce sont les sous-espaces propres de A .

La dimension d'un sous-espace de \mathbb{R}^3 stable par A est comprise entre 0 et 3.

- $\{0\}$ et \mathbb{R}^3 sont stables par A (*dimensions 0 et 3*).
- Toute droite stable par A est incluse dans un sous-espace propre, donc il y a trois droites stables par A : D_a, D_b, D_c (*dimension 1*).
- Soit H un plan stable par A . D'après ce qui précède, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Im}(A - \lambda I_3) \subset H$. Ceci implique que $\dim \text{Im}(A - \lambda I_3) \leq 2$, que $\dim \ker(A - \lambda I_3) \geq 1$ (d'après le théorème du rang). Ainsi, $\ker(A - \lambda I_3)$ n'est pas réduit à 0, donc $\lambda \in Sp(A)$.

Alors, $\ker(A - \lambda I_3)$ est une droite, donc $\dim \text{Im}(A - \lambda I_3) = 2$ et $\text{Im}(A - \lambda I_3) = H$.

Ainsi, les plans stables par u sont $\text{Im}(A - aI_3), \text{Im}(A - bI_3)$ et $\text{Im}(A - cI_3)$ (*dimension 2*).

Finalement, on a $Sp(A) = \{a, b, c\}$ et les sous-espaces de \mathbb{R}^3 stables par A sont :

$\{0\}, \ker(A - aI_3), \ker(A - bI_3), \ker(A - cI_3), \text{Im}(A - aI_3), \text{Im}(A - bI_3), \text{Im}(A - cI_3)$ et \mathbb{R}^3 .