Corrigés de la série 4 - Mines-Ponts

Planche n° 13

I) Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx$.

II) Réduire ϕ, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\phi(M)=M+tr(AM)A$ où A est fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I) Soient $x, A\in\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\int_x^A\frac{\sin t}{t}dt=\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_x^A+\int_x^A\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\frac{1-\cos A}{A}-\frac{1-\cos x}{x}+\int_x^A\frac{1-\cos t}{t^2}dt.$$

On a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1-\cos A}{A}=0$ et $\displaystyle\frac{1-\cos t}{t^2}=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$ converge.

Ainsi, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ converge avec :

$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\cos x-1}{x}+\int_x^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt.$$

La fonction f est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$, et $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$ converge.

Ainsi, f se prolonge par continuité en 0 (avec $\displaystyle f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$) et, comme $\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=-1$, f est de classe C^1 en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tous $X\in\mathbb{R}_+^*$, on peut alors intégrer par parties :

$$\int_0^X f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^X-\int_0^X xf'(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^X+\int_0^X\sin x\,dx$$

$$=\left[x\left(\frac{\cos x-1}{x}+\int_x^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt\right)\right]_0^X+\left[-\cos x\right]_0^X=\left[-1+x\int_x^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt\right]_0^X=X\int_X^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$$

Soient $X, A\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\int_X^A\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\int_X^A\frac{1}{t^2}dt-\int_X^A\frac{\cos t}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_X^A-\left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_X^A-2\int_X^A\frac{\sin t}{t^3}dt$$

$$=\frac{1}{X}-\frac{1}{A}-\frac{\sin A}{A^2}+\frac{\sin X}{X^2}-2\int_X^A\frac{\sin t}{t^3}dt$$

Et quand A tend vers $+\infty$ (tous les termes admettent une limite), on obtient :

$$\int_X^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\frac{1}{X}+\frac{\sin X}{X^2}-2\int_X^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt.$$

Alors :

$$\int_0^X f(x)dx = 1 + \frac{\sin X}{X} - 2X\int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}dt .$$

Et, pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\left| X\int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}dt \right| \le X\int_X^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{2X}$, donc quand X tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \right) dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

****

II) Remarquons que la question a du sens car ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (entre autres, car la trace est linéaire).

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\phi(M) = \lambda M$. On a alors :

$$M + tr(AM)A = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)M = tr(AM)A .$$

Si $\lambda = 1$, on a $tr(AM) = 0$ car $A \neq 0_n$. Or, l'application $M \mapsto tr(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \phi(M) = M\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus tr(AM) = 0\}$ est le noyau de cette forme linéaire, donc est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $\lambda \neq 1$, on a $M = \dfrac{tr(AM)}{\lambda - 1} A \in \text{Vect}(A)$ et réciproquement, si $M = \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$\phi(M) = \phi(\alpha A) = \alpha\phi(A) = \alpha\left[A + tr(A^2)A\right] = \alpha\left(1 + tr(A^2)\right)A = \left(1 + tr(A^2)\right)M .$$

Ainsi, 1 est valeur propre de ϕ, de sous-espace propre associé $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus tr(AM) = 0\}$, et :

- si $tr(A^2) = 0$, la seule valeur propre de ϕ est 1 ;
- si $tr(A^2) \neq 0$, $1 + tr(A^2)$ est valeur propre de ϕ, de sous-espace propre associé $\text{Vect}(A)$.

Planche n° 14

I) Etablir la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n(x) = e^{-nx} - (1-x)^n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle ?

II) Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC avec A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

I) On a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{quand } x < 0 \\ 0 & \text{quand } 0 \le x < 2 \\ \text{pas de limite} & \text{quand } x \ge 2 \end{cases}$$

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2[$ (et ne converge pas ailleurs).

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable, de dérivée $f_n':x\mapsto -n\left[e^{-nx}-(1-x)^{n-1}\right]$. On a :

$$f_n'(x)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-nx}\leq(1-x)^{n-1}.$$

Sur $\left[0,1\right[$, ceci équivaut à $-nx\leq(n-1)\ln(1-x)$, soit $h_n(x)=(n-1)\ln(1-x)+nx\geq 0$, donc f_n' est du signe de h_n sur $[0,1[$.

La fonction h_n est dérivable sur $[0,1[$, de dérivée $h_n':x\mapsto\dfrac{1-nx}{1-x}$. On a donc pour $n\geq 2$:

- sur $\left[0,\dfrac{1}{n}\right[$, h_n est croissante de $h_n(0)=0$ à $h_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\geq 0$, donc positive ;
- sur $\left[\dfrac{1}{n},1\right[$, h_n est décroissante de $h_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\geq 0$ à $-\infty$, donc s'annule une fois en α_n d'après le théorème de la bijection continue, et h_n est positive sur $\left[\dfrac{1}{n},\alpha_n\right[$ et négative sur $\left[\alpha_n,1\right[$.

On obtient alors le tableau de signes :

x	0	$\frac{1}{n}$	α_n	$\frac{2}{n}$	1
$h_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	

Alors :

- sur $\left[0,\alpha_n\right[$, f_n' est positive, donc f_n est décroissante de $f_n(0)=0$ à $f_n(\alpha_n)\geq 0$;
- sur $\left[\alpha_n,1\right[$, f_n' est négative, donc f_n est décroissante de $f_n(\alpha_n)$ à $f_n(1)=e^{-n}>0$.

Ainsi, $\sup\limits_{[0,1[}|f_n|=f_n(\alpha_n)$ et comme $h_n(\alpha_n)=0$, on a $(1-\alpha_n)^n=e^{-n\alpha_n}(1-\alpha_n)$, d'où :

$$\sup_{[0,1[}|f_n|=e^{-n\alpha_n}-(1-\alpha_n)^n=e^{-n\alpha_n}-e^{-n\alpha_n}(1-\alpha_n)=e^{-n\alpha_n}\alpha_n.$$

On a $\alpha_n\in\left[\dfrac{1}{n},1\right[$, donc $n\alpha_n\geq 1$ et $\sup\limits_{[0,1[}|f_n|\leq\dfrac{1}{e}\alpha_n$. Enfin :

$$h_n\left(\frac{2}{n}\right)=(n-1)\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+2=(n-1)\left(-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{8}{3n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+2=-\frac{2}{3n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, $h_n\left(\dfrac{2}{n}\right)<0$ apcr et ainsi, $\dfrac{1}{n}\leq\alpha_n\leq\dfrac{2}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

Avec $\sup\limits_{[0,1[}|f_n|\leq\dfrac{1}{e}\alpha_n$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{[0,1[}|f_n|=0$ et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\left[0,1\right[$.

Soit maintenant, $a\in\left]1,2\right[$. Pour tout $x\in\left[1,a\right]$:

$$|f_n(x)|\leq e^{-n}+|1-a|^n.$$

Comme $|1-a|<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\leq e^{-n}+|1-a|^n\right]=0$ et par hypothèse de domination, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge uniformément sur tout segment $[1,a]$ inclus dans $[1,2[$, donc, avec la convergence uniforme sur $[0,1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ inclus dans $[0,2[$.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,2[$, $|f_n(x)|=\left|e^{-nx}-(1-x)^n\right|\le e^{-nx}+|1-x|^n\le 2$, donc $\sup_{x\in[0,2[}|f_n(x)|$ existe. Mais, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_{2n+1}(2)=e^{-2(2n+1)}+1>1$, donc $\sup_{x\in[0,2[}|f_{2n+1}(x)|\ge 1$ et ainsi, la suite $\left(\sup_{x\in[0,2[}|f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,2[$. Finalement :

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout $[0,a]$ inclus dans $[0,2[$, mais pas sur $[0,2[$.

****

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(0)=0$, donc $\sum f_n(0)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0)=0$.

Pour tout $x\in\,]0,2[$, on a $1-x\in\,]-1,1[$ et pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} f_n(x)=\sum_{n=0}^{N} e^{-nx}-\sum_{n=0}^{N}(1-x)^n=\frac{1-e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}-\frac{1-(1-x)^{N+1}}{1-(1-x)}=\frac{1-e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}-\frac{1-(1-x)^{N+1}}{x}.$$

Donc, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} f_n(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}$, donc $\sum f_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}$.

Ainsi, la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x\in[0,2[$ (et diverge grossièrement sinon).

****

II) L'origine O du repère est l'orthocentre de ABC si et seulement elle appartient à deux hauteurs du triangle, par exemple les hauteurs issues de A et de B, ce qui revient à :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0.$$

Et :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0 \quad&\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\left[\overline{z_{\overrightarrow{OA}}}.z_{\overrightarrow{BC}}\right]=\mathrm{Re}\left[\overline{z_{\overrightarrow{OB}}}.z_{\overrightarrow{AC}}\right]=0\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\left[\overline{z}_A(z_C-z_B)\right]=\mathrm{Re}\left[\overline{z}_B(z_C-z_A)\right]=0\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\left[\overline{z}(z^3-z^2)\right]=\mathrm{Re}\left[\overline{z}^2(z^3-z)\right]=0\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\left[|z|^2(z^2-z)\right]=\mathrm{Re}\left[|z|^2(z^2\overline{z}-\overline{z})\right]=0\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{Re}\left[z^2-z\right]=\mathrm{Re}\left[z^2\overline{z}-\overline{z}\right]=0
\end{aligned}$$

Or :

$$\mathrm{Re}\left[z^2-z\right]=\frac{1}{2}\left(z^2-z+\overline{z}^2-\overline{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z^2+\overline{z}^2-(z+\overline{z})\right)$$

$$\mathrm{Re}\left[z^2-z\right]=\frac{1}{2}\left(z^2\overline{z}-\overline{z}+\overline{z}^2z-z\right)=\frac{1}{2}\left(\left(|z|^2-1\right)(z+\overline{z})\right)$$

On obtient :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z^2+\overline{z}^2=z+\overline{z} \\ \left(|z|^2-1\right)(z+\overline{z})=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+\overline{z}^2=z+\overline{z} \\ |z|^2=1 \text{ ou } z+\overline{z}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+\overline{z}^2=z+\overline{z} \\ |z|=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z^2+\overline{z}^2=0 \\ z+\overline{z}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=e^{i\theta} \\ \cos 2\theta=\cos\theta \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2z^2=0 \\ \overline{z}=-z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=e^{i\theta} \\ 2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0 \end{cases} \text{ ou } \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=e^{i\theta} \\ (\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)=0 \end{cases} \text{ ou } \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=e^{i\theta} \\ \cos\theta=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=e^{i\theta} \\ \cos\theta=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \quad z=0$$

$$\Leftrightarrow \quad z=1 \text{ ou } z=j \text{ ou } z=\overline{j} \text{ ou } z=0$$

La solution $z=1$ est exclue (car dans ce cas, on a $A=B=C\neq O$), donc :

Les solutions sont donc 0, j et $\overline{j}$.

Dans les deux derniers cas, ABC est équilatéral de centre O.

Planche n° 15

I) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose u diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_p$.

Montrer qu'il existe p endomorphismes $u_1,\dots,u_p$ tels que pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, $P(u)=\sum_{i=1}^{p}P(\lambda_i)u_i$.

Montrer que pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, il existe $P_i\in\mathbb{C}[X]$ tel que $u_i=P_i(u)$.

Réciproquement, montrer que si u est un endomorphisme tel qu'il existe p endomorphismes $u_1,\dots,u_p$ vérifiant pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, $P(u)=\sum_{i=1}^{p}P(\lambda_i)u_i$, alors u est diagonalisable.

II) Convergence de la série de terme général $u_n=\int_0^1\cos(nt^2)dt$.

I) Comme u est diagonalisable, on a $E=E_1\oplus\dots\oplus E_p$ où E_i est le sous-espace propre associé à λ_i.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, soit $u_i \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u_i|_{E_i} = id_{E_i}$ et pour tout $x \in E_j$ avec $j \neq i$, $u_i(x) = 0$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et tout $x_i \in E_i$, on a $u(x_i) = \lambda_i x_i = \lambda_i u_i(x_i)$ et $P(u)(x_i) = P(\lambda_i)u_i(x_i)$.

Alors, pour tout $x = x_1 + ... + x_p \in E$ avec $x_i \in E_i$, on a $u_i(x) = u_i(x_1) + ... + u_i(x_p) = u_i(x_i)$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, donc $P(u)(x_i) = P(\lambda_i)u_i(x)$ et :

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^{p} P(u)(x_i) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)u_i(x) = \left[\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)u_i\right](x)$$

Ceci étant vrai pour tout x de E, on a bien $P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)u_i$.

****

Posons pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $P_i = \dfrac{\prod_{j=1, j\neq i}^{p} (X - \lambda_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{p} (\lambda_i - \lambda_j)}$ (polynôme de Lagrange). On a pour tout $i \in [\![1,p]\!]$:

$$P_i(u) = \sum_{j=1}^{p} P_i(\lambda_j)u_j = P_i(\lambda_i)u_i = u_i .$$

****

La réciproque a été vue dans la planche 11 (il suffit de remarquer que $\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de u, scindé à racines simples).

****

II) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $t \in]0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt^2) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{it^2})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)t^2} - 1}{e^{it^2} - 1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{(n+1)t^2}{2}}}{e^{i\frac{t^2}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{nt^2}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\frac{nt^2}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t^2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) + \sin\left(\frac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t^2}{2}\right)} + 1$$

Comme $\dfrac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)} \to \dfrac{2n+1}{2}$ quand $t \to 0$, $t \mapsto \dfrac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)}$ est intégrable sur $[0,1]$ et :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \cos(kt^2)\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)} + 1\right) dt = 1 + \frac{1}{2} I_n \text{ avec } I_n = \int_0^1 \frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)} dt.$$

Posons, pour $t \in]0,1]$:

$$g(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\sin(t^2/2)} - \frac{1}{t^2/2}\right) = t\,\frac{\dfrac{t^2}{2} - \sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)}{\dfrac{t^2}{2}\sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)} = \frac{\dfrac{t^2}{2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k+1}}{t\dfrac{t^2}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k+1}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+3)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k+1}}{\left[1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{2k}\right]}$$

La dernière formule montre que g se prolonge en 0 en une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$ (car quotient de deux séries entières et le dénominateur ne s'annule pas).

On peut alors écrire :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t^2}{2}\right)} dt = \int_0^1 \frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)}{\dfrac{t^2}{2}} dt + \int_0^1 t\sin\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right) g(t)\,dt.$$

On pose $u = (2n+1)\dfrac{t^2}{2}$, soit $dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}\dfrac{1}{\sqrt{u}}du$ dans la première intégrale et, comme les fonctions g et $t \mapsto \cos\left((2n+1)\dfrac{t^2}{2}\right)$ sont C^1 sur $[0,1]$, on peut intégrer par partes la seconde intégrale, ce qui donne :

$$I_n = (2n+1)\int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{u}}du + \left[-\frac{1}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)g(t)\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)g'(t)\,dt$$

Soit :

$$I_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}}du + \frac{1}{2n+1}\left[-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)g(1) + \int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)g'(t)\,dt\right].$$

On a :

- $\left|-\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)g(1) + \displaystyle\int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)g'(t)\,dt\right| \le |g(1)| + \displaystyle\int_0^1 |g'(t)|\,dt$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\left[-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\right)g(1) + \int_0^1 \cos\left((2n+1)\frac{t^2}{2}\right)g'(t)\,dt\right]\right) = 0.$$

- $\left|\dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}}\right| \leq \dfrac{1}{u\sqrt{u}}$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{du}{u\sqrt{u}}$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}} du$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du .$$

De plus, $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}} du$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du + \int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}} du$$

$$= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du - \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin u}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}} du = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}\left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}}\right)\sin u du$$

Et comme $\left(\dfrac{1}{u\sqrt{u}} - \dfrac{1}{(u+\pi)\sqrt{u+\pi}}\right)\sin u > 0$ sur $]0,\pi[$, on a $\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}} du > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ainsi, $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u\sqrt{u}} du > 0$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\sin u}{u\sqrt{u}} du\right) = +\infty .$$

Finalement, on obtient $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$ et donc, la série de terme général $u_n = \int_0^1 \cos(nt^2)dt$ diverge.

Planche n° 16

I) Trouver les polynômes annulateurs de $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

II) Soit H, définie par $H(0,0)=0$ et $H(x,y) = \dfrac{x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

La fonction H est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

I) On suppose a, b et c distincts deux à deux. On peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} a & (0) & (0) \\ (0) & M_1 & (0) \\ (0) & (0) & M_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$$

avec $M_1 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$. On a :

$$P(M)=\begin{pmatrix} P(a) & (0) & (0)\\ (0) & P(M_1) & (0)\\ (0) & (0) & P(M_2)\end{pmatrix}.$$

Donc, $P(M)=0_6$ si et seulement si $P(a)=0$, $P(M_1)=0_2$ et $P(M_2)=0_3$.

On a $P(a)=0$ si et seulement si $X-a$ divise *P*.

La seule valeur propre de M_1 est *b* et $(M_1-bI_2)^2=0_2$, mais $M_1-bI_2\neq 0_2$. Donc, $P(M_1)=0_2$ si et seulement si $(X-b)^2$ divise *P*.

De même, on a $(M_2-bI_3)^2\neq 0_2$ et $(M_2-bI_3)^3=0_2$, donc $P(M_2)=0_3$ si et seulement si $(X-c)^3$ divise *P*.

Ainsi, $P(M)=0_6$ si et seulement si $X-a$, $(X-b)^2$ et $(X-c)^3$ divisent *P*, autrement dit, les polynômes annulateurs de *M* sont les polynômes de la forme $(X-a)(X-b)^2(X-c)^3Q$ avec $Q\in\mathbb{K}[X]$.

****

II) On a $(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$.

Comme $(x,y)\mapsto x^4y$ et $(x,y)\mapsto(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, *H* l'est aussi en tant que quotient de telles fonctions. On a pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$:

$$\left|H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|=\frac{r^2\cos^4\theta\left|\sin\theta\right|}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}.$$

<u>*1ère version*</u> :

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\varepsilon<1$. Pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tel que $r\leq\varepsilon$, on a :

- si $\left|\sin\theta\right|\leq\varepsilon$, alors $\cos^2\theta\geq 1-\varepsilon^2>0$, donc $r^2\cos^4\theta\neq 0$ et :

$$\left|H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|\leq\frac{r^2\cos^4\theta\left|\sin\theta\right|}{r^2\cos^4\theta}=\left|\sin\theta\right|\leq\varepsilon.$$

- si $\left|\sin\theta\right|>\varepsilon$, alors $\left|\sin\theta\right|\neq 0$ et :

$$\left|H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|\leq\frac{r^2\cos^4\theta\left|\sin\theta\right|}{\sin^2\theta}\leq\frac{r^2}{\left|\sin\theta\right|}\leq\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}=\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tel que $r\leq\varepsilon$, on a $\left|H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|\leq\varepsilon$. Ceci prouve que $\lim\limits_{r\to 0}H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)=0$, donc que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}H(x,y)=0=H(0,0)$, et donc que *H* est continue en 0 et finalement, *H* est continue sur $\mathbb{R}^2$.

<u>*2ème version*</u> :

Si $\cos\theta=0$, alors $\left|H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|=0$ et si $\cos\theta\neq 0$, on a $\left|H\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)\right|=f\left(\left|\sin\theta\right|\right)$ avec $f:t\mapsto\dfrac{at}{a+t^2}$ et $a=r^2\cos^4\theta>0$.

Une étude rapide de f sur $\mathbb{R}_+$ prouve que f est positive et admet pour maximum $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ en $\sqrt{a}$.

On a donc, pour tout $(r,\theta)\in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\left|H\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{r^2\cos^4\theta} = \frac{1}{2}r\cos^2\theta \leq \frac{1}{2}r\,.$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{r\to 0} H\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) = 0$, donc que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} H(x,y) = 0 = H(0,0)$, et H est continue en 0.